

Sbírka úloh Petra Šimůnka

Petr Šimůnek

květen 2015 - červen 2016

Obsah

1	M&M XXII. ročník 1. téma	6
1.1	M&M XXII. ročník; 1. téma; 1. příspěvek	6
1.2	M&M XXII. ročník; 1. téma; 2. příspěvek	14
1.3	M&M XXII. ročník; 1. téma; 3. příspěvek	20
1.4	M&M XXII. ročník; 1. téma; příspěvek do M&M	24
1.5	M&M XXII. ročník; 1. téma; 4. příspěvek	28
1.6	M&M XXII. ročník; 1. téma; 5. příspěvek	33
1.7	M&M XXII. ročník; 1. téma; 6. příspěvek	40
1.8	M&M XXII. ročník; 1. téma; 7. příspěvek	49
1.9	M&M XXII. ročník; 1. téma; 8. příspěvek	52
1.10	M&M XXII. ročník; 1. téma; 9. příspěvek	57
2	M&M XXII. ročník 2. téma	67
2.1	M&M XXII. ročník; 2. téma; 1. příspěvek	67
3	M&M XXII. ročník 3. téma	77
3.1	M&M XXII. ročník; 3. téma; 1. příspěvek	77
3.2	M&M XXII. ročník; 3. téma; 2. příspěvek	81
4	M&M XXII. ročník 4. téma	87
4.1	M&M XXII. ročník; 4. téma; 1. příspěvek	87
4.2	M&M XXII. ročník; 4. téma; 2. příspěvek	93
4.3	M&M XXII. ročník; 4. téma; 3. příspěvek	98
5	M&M XXII. ročník 5. téma	101
5.1	M&M XXII. ročník; 5. téma; 1. příspěvek	101
6	M&M XXII. ročník 1. série	102
6.1	M&M XXII. ročník; 1. série; 1. úloha	102
6.2	M&M XXII. ročník; 1. série; 2. úloha	107
6.3	M&M XXII. ročník; 1. série; 3. úloha	110
6.4	M&M XXII. ročník; 1. série; 4. úloha	112
7	M&M XXII. ročník 2. série	115
7.1	M&M XXII. ročník; 2. série; 1. úloha	115
7.2	M&M XXII. ročník; 2. série; 2. úloha	119
7.3	M&M XXII. ročník; 2. série; 3. úloha	122

7.4	M&M XXII. ročník; 2. série; 4. úloha	125
7.5	M&M XXII. ročník; 2. série; 5. úloha	127
8	M&M XXII. ročník 3. série	131
8.1	M&M XXII. ročník; 3. série; 1. úloha	131
8.2	M&M XXII. ročník; 3. série; 2. úloha	133
8.3	M&M XXII. ročník; 3. série; 3. úloha	136
8.4	M&M XXII. ročník; 3. série; 4. úloha	138
8.5	M&M XXII. ročník; 3. série; 5. úloha	143
9	M&M XXII. ročník 4. série	147
9.1	M&M XXII. ročník; 4. série; 1. úloha	147
9.2	M&M XXII. ročník; 4. série; 2. úloha	150
9.3	M&M XXII. ročník; 4. série; 3. úloha	152
9.4	M&M XXII. ročník; 4. série; 4. úloha	155
9.5	M&M XXII. ročník; 4. série; 5. úloha	161
10	M&M XXII. ročník 5. série	165
10.1	M&M XXII. ročník; 5. série; 1. úloha	165
10.2	M&M XXII. ročník; 5. série; 2. úloha	167
10.3	M&M XXII. ročník; 5. série; 3. úloha	173
10.4	M&M XXII. ročník; 5. série; 4. úloha	175
10.5	M&M XXII. ročník; 5. série; 5. úloha	178
11	M&M XXII. ročník 6. série	180
11.1	M&M XXII. ročník; 6. série; 1. úloha	180
11.2	M&M XXII. ročník; 6. série; 2. úloha	182
11.3	M&M XXII. ročník; 6. série; 3. úloha	184
11.4	M&M XXII. ročník; 6. série; 4. úloha	190
11.5	M&M XXII. ročník; 6. série; 5. úloha	194
12	FYKOS XXIX. ročník 1. série	198
12.1	FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 1. úloha	198
12.2	FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 2. úloha	200
12.3	FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 3. úloha	202
12.4	FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 4. úloha	204
12.5	FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 5. úloha	209
12.6	FYKOS XXIX. ročník; 1. série; P úloha	213

12.7 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; E úloha	216
12.8 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; S úloha	220
13 FYKOS XXIX. ročník 2. série	224
13.1 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 1. úloha	224
13.2 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 2. úloha	226
13.3 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 3. úloha	230
13.4 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 4. úloha	232
13.5 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 5. úloha	234
13.6 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; P úloha	235
13.7 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; E úloha	238
13.8 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; S úloha	243
14 FYKOS XXIX. ročník 3. série	247
14.1 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 1. úloha	247
14.2 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 2. úloha	249
14.3 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 3. úloha	251
14.4 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 4. úloha	254
14.5 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 5. úloha	257
14.6 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; P úloha	262
14.7 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; E úloha	265
14.8 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; S úloha	270
15 FYKOS XXIX. ročník 4. série	274
15.1 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 1. úloha	274
15.2 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 2. úloha	276
15.3 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 3. úloha	278
15.4 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 4. úloha	281
15.5 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 5. úloha	283
15.6 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; P úloha	287
15.7 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; E úloha	290
15.8 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; S úloha	295
16 FYKOS XXIX. ročník 5. série	300
16.1 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 1. úloha	300
16.2 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 2. úloha	302
16.3 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 3. úloha	304
16.4 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 4. úloha	307

16.5 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 5. úloha	309
16.6 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; P úloha	312
16.7 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; E úloha	314
16.8 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; S úloha	317
17 FYKOS XXIX. ročník 6. série	320
17.1 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 1. úloha	320
17.2 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 2. úloha	322
17.3 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 3. úloha	324
17.4 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 4. úloha	327
17.5 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 5. úloha	329
17.6 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; P úloha	333
17.7 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; E úloha	336
17.8 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; S úloha	341
18 Výsledky	345
18.1 M&M	345
18.2 FYKOS	345
19 Statistika	345

1 M&M XXII. ročník 1. téma

1.1 M&M XXII. ročník; 1. téma; 1. příspěvek

Téma 1: Pojd'te pane, budeme si hrát

V témátku se budeme zabývat jednou hrou pro dva hráče. Představte si, že s kamarádem napíšete na tabuli bílou křídou všechna přirozená čísla (máte dlouhou tabuli a spoustu křídý). Ted' se budete střídat; každý si ve svém tahu nejprve vybere jedno bílé číslo na tabuli a vybarví jej červeně. Následně smaže všechna bílá čísla, která můžeme napsat jako součet několika červených (každé můžeme použít vícekrát). Takže pokud jsme v prvním tahu vybarvili trojku, smažeme $6=3+3$, $9=3+3+3$, ... Jestliže si následně protihráč vybere pětku, smaže $8=5+3$, $10=5+5$, $11=5+3+3$, ... Ten hráč, který musí vybarvit jedničku, prohrává.

Nás by zajímalo, co všechno o této hře můžeme říct. Tak třeba – musí tato hra někdy skončit, nebo je možné, že si budeme barvit stále nová a nová čísla a nikdy nepřestaneme? Pokud hra vždy musí skončit, můžeme nějak omezit počet jejích tahů? Můžeme říci, že hra vždy skončí za méně než tisíc nebo třeba milion tahů? Pokud hra nemusí vždy skončit, zkuste najít nějaký konkrétní průběh takové hry.

Zkusme nyní jednu konkrétní hru rozebrat. První hráč začne s dvojkou a smaže tak všechna sudá čísla. My si následně vybereme pětku a smažeme tak všechna lichá čísla větší než pět ($7=5+2$, $9=5+2+2$, ...). Nyní protihráč vybarví trojku a my jsme prohráli. Trojku jsme si však mohli vybrat místo pětky v minulém tahu, pak by na soupeře rovnou zůstala jenom jednička a vyhráli bychom. Pokud v nějaké pozici můžeme vyhrát nezávisle na tazích soupeře, řekneme, že máme vyhrávající strategii (to je případ pozice poté, co soupeř vybarvil dvojkou). Má na začátku nějaký hráč vyhrávající strategii? Pokud ano, jak tato strategie vypadá?

Zabývejte se hrami s konkrétními tahy v úvodu hry. Pro začátek můžete zkusit například pozice, jež vzniknou po vybarvení čísel 4 a 5, popřípadě 4 a 6.

Nejprve jsem řešil problém pouze teoreticky (tužka papír), během tohoto stádia bádání jsem si všiml několika věcí (některé jsou banální, ale jejich znalosti budeme dále využívat a proto je zde píši):

- K donucení soupeře, aby vyškrtl 1 musí být vyškrtnuty všechny ostatní čísla.
- Klíčová jsou čísla 2 a 3. Jelikož po vyškrtnutí těchto 2 čísel jsou vyškrtnuta i všechna ostatní čísla.
- Pokud jeden hráč vyškrtne 2 nebo 3, druhý hráč automaticky vyškrtává to druhé číslo a vyhrává.
- Můžeme tedy říci, že cílem hry je donutit oponenta, aby vyškrtl 2 nebo 3.

Na základě rady v zadání jsem se nejprve rozhodl prostudovat konkrétní hry. her jsem rozebíral více, rozebereme si tu pouze jednu, jelikož na všechny tu není prostor (a navíc postup je vždy stejný). Začneme s tahy 4 a 5, zvýrazněná čísla jsou vyřazena. Ostatní jsou kurzívou, aby šla lépe rozeznat.

Tah: 1										Tahy: 4					Další na tahu: "2"					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Tah: 2										Tahy: 4, 5					Další na tahu: "1"					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Tah: 3.1										Tahy: 4, 5, 6					Další na tahu: "2"					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Tah: 4.1										Tahy: 4, 5, 6, 7					Další na tahu: "1"					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Vyhrál hráč číslo 2! (Zbývá pouze: 1, 2, 3)																				
Tah: 3.2										Tahy: 4, 5, 7					Další na tahu: "2"					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Tah: 4.2										Tahy: 4, 5, 7, 6					Další na tahu: "1"					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Vyhrál hráč číslo 2! (Zbývá pouze: 1, 2, 3)																				
Tah: 3.3										Tahy: 4, 5, 11					Další na tahu: "2"					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Vyhrál hráč číslo 1! (Zbývá pouze: 1, 2, 3 a 6, 7)																				

Na první pohled se nám může předcházející zápis zdát nepřehledný. Co tu tedy máme? Když se podíváme na hlavičku každé tabulky, tak zjistíme, že obsahuje následující údaje: číslo tahu, jaké byly provedeny tahy a kdo je další na tahu. Celkem po tazích 4, 5 se nám zbývají čísla 6, 7, 11. Otvírají se nám zde 3 scénáře:

První: Hráč číslo 1 vybere číslo 6. Zbude pak už pouze 7 (1, 2, 3 nepočítáme, jelikož jejich škrtnutí automaticky vede k prohře). Hráč číslo 2 tedy škrtně 7 a tímto tahem vyhrává!

Druhý: Hráč číslo 1 vybere číslo 7. Zbude pak už pouze 6. Hráč číslo 2 tedy škrtně 6 a tímto tahem vyhrává!

Třetí: Hráč číslo 1 vybere číslo 11. Zbude pak zbudou 6 a 7. Hráč číslo 2 tedy škrtně vyškrtně jedno z nich, následně hráč 1 vyškrtně to druhé a vyhrává!

První i druhý scénář tedy vyhrál hráč číslo 2, ale třetí vyhrává hráč 1 a jelikož to bude hráč číslo 1, kdo bude vybírat scénář, bude to on, kdo vyhraje.

Tento postup jsem aplikoval na následující otevírající tahy: 4 a 5; 4 a 6; 4 a 7; 8 a 4; 4 a 9. Pokud jsem neudělal chybu (výpočtů bylo poměrně hodně a občas bylo těžké se v tom všem zorientovat, takže si netroufám za tyto výpočty naprosto 100% ručit) tak by všechny tyto hry měl vyhrát hráč číslo 1.

Jak jste si možná všimli, v tabulce byla čísla pouze od 1 do 20. Toto zjednodušení jsem si mohl dovolit z toho důvodu, že všechny čísla větší než 20 už byla vyškrtnuta. Jelikož jsme vyškrtnuli 4, musí být logicky každé 4. číslo vyškrtnuté, a jelikož je zde série 4 vyškrtnutých čísel v řadě, máme jistotu, že všechna následující jsou též vyškrtnutá.

Jako vítězný tah si označíme tah, který v x -tém kole nenechá druhému hráči v kole $x + 1$ tahy tak, aby bylo kolo $x + 2$ opět vítězné. (a opět) Konkrétně: Hráč 1 nepotřebuje, aby všechny možnosti vedly k vítězství (hráče 1), ale aby vždy když hraje hráč 2, tak aby 2 nemohl svým tahem vyhrát.

Mějme následující předpoklad: Pokud hráč 1 začne hru tahem, že smaže číslo 4. Hráč číslo 2 prohrál nezávisle na výběru čísla ve druhém tahu. Tomuto předpokladu nahrávají mé experimenty s druhými čísly od 5 do 9. Pak mě však ale napadlo, že hráč číslo 2 tedy nebude chtít vybírat čísla v rozsahu od 5 do 9, teoreticky může tuto volbu "odložit", tak, že vybere nějaké ohromné číslo (1 000 000). Pokud by pak chtěl hráč číslo 1 zavést hru do těchto čísel, sám by se chytil do pastí. Jelikož předchozí tah hráče 2 by neměl vliv a pozice hráčů by se teď dočista otočily.

V předchozím odstavci se nám objevil pojem "zahodit tah" čímž bylo označeno zahrání nějakého hodně vysokého čísla. Objevuje se mám zde příležitost odpovědět na jednu z otázek v zadání, je počet tahů hry omezený? Představme si tedy, že zahrajme nějaké hodně velké číslo, (tím vyřadíme jeho násobky) a nyní číslo vedle něho (tím vyřadíme jejich kombinace). Začnou se nám tu tedy periodicky vytvářet takové "ostrovy" čísel. Čísla jsou daleko do sebe, takže bude stále hodně "prostoru" mezi nimi. Když však zavítáme do vyšších řádů, zjistíme, že mezery mezi "ostrovy" vyškrtnutých čísel se budou postupně zmenšovat, až někde zaniknou. Podle mě má tedy hra omezený počet tahů, záleží však na prvních 2 tazích (záleží na nich to, kolik bude maximálně tahů) a pokud budou první tahy opravdu velké, tahů může být tolik, že se toto číslo může blížit k nekonečnu. Nejvíce můžeme hru protahovat tak, že (představme si, že největší číslo je 721) budeme hrát 721; 720; 719... (princip je myslím jasný) V takovém případě bude hra trvat opravdu dlouho. Jinak jako zajímavost dodám, že nejkratší hra bude: 3; 2; 1 (3 tahy). Zde hráč číslo 1 prohrál hru už v prvním tahu, chybou, že škrtnl jedno z čísel 2 nebo 3.

Po tomto jsem si řekl, že problém je však tak obsáhlý a že počítání jen jedné varianty na papíře zabírá tolik času, že je na času pomoci si moderními technologiemi. Napsal jsem si tedy pseudo-"program" v excellu. Proces fungování "programu" je popsán v příloze A na stranách 11 až 12.

Nakonec jsem se rozhodl, že je potřeba napsat nový ještě propracovanější program! To jak tento program bude fungovat naleznete v příloze B na stranách 13 až 13. (TODO)

Nakonec nám tu vystává otázka: Je hra pro jednoho hráče vyhraná (zatím by se jako kandidát nabízel spíše hráč 1)? Podle vědce Ernsta Zer-

měla by každá logická hra pro dva měla mít vítěznou strategii (cestu) pro jednoho z hráčů. Je v našich silách toto řešení nalézt? (viz. šachy atd.). To je otázka kterou budeme rozkrývat v pokračováních tohoto článku.

To by bylo prozatím vše, nezapomeňte si programy z přílohy stáhnout a ozkoušet je! :-)

Příloha A

V této příloze je popsáno, jak se v přiloženém "programu" orientovat, zadávat do něj hodnoty, zjišťovat výsledky a také se podíváme jak tento "program" vlastně funguje.

V příloze jste si stáli 2 soubory, jeden výrazně menší a jeden výrazně větší.

Ten menší je optimalizovaná zjednodušená verze která slouží pouze pro krátké hry, počítá čísla pouze do 100 a můžou se zde hrát pouze 4 tahy (2 kola), na druhou stranu provádí všechny výpočty výrazně rychleji a je vhodný pro pomalé počítače nebo rychlé hry, kdy se zabýváme pouze menšími čísly.

Poté tady máme větší verzi které se budeme věnovat více. Dokáže simulovat i delší hry, počítá čísla do 1000 a může se zde hrát 10 tahů (5 kol), všechny výpočty však provádí výrazně pomaleji a i výkonnější počítače můžou mít problémy¹. Je vhodný pro komplexnější delší hry.

Nyní přistoupíme k průběhu výpočtu, jelikož menší verze je jen pouze zjednodušenou verzí velké verze popíšeme si pouze proces výpočtu ve velké verzi. Když soubor otevřeme měla by nás uvítat stránka "Zadávání & Výsledky" Tuto stranu nemusíme po celou dobu opouštět, všechno zadávání i výsledky se zobrazují na této straně. Nahoře je 10 polí, do těchto polí zapisujeme svoje tahy (ideálně zleva doprava); níže je 1 000 čísel, v případě, že je okolo čísel bílá, znamená to, že číslo ještě není škrtnuté/smazané/eliminované. . . V případě, že okolí čísla zčervenalo číslo bylo škrtnuto/smazáno/eliminováno.

Nyní si vysvětlíme jak "program" rozhoduje jestli číslo bylo vyřazeno nebo ne. Obecný postup je, že program má řadu čísel od 1 do 500, pak se podívá jestli už bylo číslo eliminováno nebo ne. V případě, že číslo bylo eliminováno, ponechá jeho hodnotu pokud ne je číslo nahrazeno 0. V následujícím řádku pod číslem je k číslo přičtena následující neznámá (například pokud jsme měli vstupní hodnoty platné pro první 4 neznáme pak přičítáme 5. neznámou) Tento proces je opakován 250×. Posléze je u každého čísla od 1 do 500 zjištěno jestli se mezi čísla vyskytuje. Následovně je celý tento proces opakován pro další číslo. Tento postup zaručuje platnost pro prvních 500 čísel. Pokud není

¹V Excelu můžete sledovat průběh výpočtu v pravém dolním rohu.

vyškrtnuta 1 dříve než je nutné)

Technická poznámka: Původně měl být "program" pro prvních 1 000 čísel. Po testech však bylo zjištěno, že procesoru Intel Core i5-3570K (1 z výkonnějších) by počítání tohoto problému zabralo přes 30 s. Po chvilce se ukázalo, že veškeré testování by bylo časově extrémně náročné. Proto jsem se rozhodl snížit počet políček na 500 a snížit tak 4×! náročnost celého procesu (/délku výpočtu).

Příloha B

Zde si ve zkratce popíšeme fungování "programu 2.0" Z určité části bude využívat stavbu původního programu (příloha A strana 11). Nejprve zadáme programu pár čísel (2?) program pak tradičně vypočítá vyškrtnutá a nevyškrtnutá čísla. Poté vezme pouze nevyškrtnutá čísla. Představme si tyto čísla jako řetězec (vyškrtnutá čísla jsou nahrazena 0). Například: 1; 2; 3; 0; 0; 6; 7; 0; 0; 0; 11; 0; 0; 0. . . Následně program tento řetězec upraví na 1; 2; 3; 6; 7; 11 Poté bude postupně brát jednotlivá čísla a bude je zkoušet, počítat jaká čísla zůstali, upravovat opět řetězec. . .

Problém je, že pokud budu opět psát tuto "aplikaci" v programu excel bude to de-fakto znamenat všechny tyto možnosti spočítat. Další problém bude v celé optimalizaci a v tom, že v každém pokud budeme program psát pro x čísel a n dalších tahů, budeme muset celý tento proces provést x^n . Podle mých předběžných odhadů nemůže x být menší než 5 a n menší než 3 nebo 4. A i tak by to bylo pravděpodobně málo.

I pokud bychom z naší ukázkové hry na straně 7 vypustili ze řetězce první tři čísla (po jejichž vyškrtnutí hráč automaticky prohrává (1; 2; 3)) Naše aplikace by musela tento výpočet provést $3^3 = 27 \times$ krát. Tento program tedy bude náročný jak po stránce výpočetní, tak i po stránce psací a nakonec i organizační (zorganizování struktury).

1.2 M&M XXII. ročník; 1. téma; 2. příspěvek

-

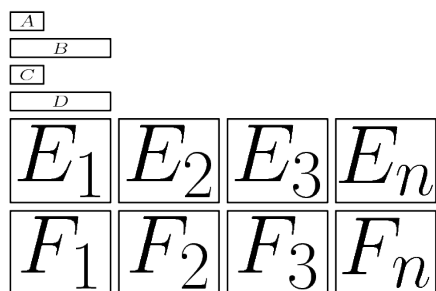
V mém minulém článku jsme krátce rozvedl problém „Pojďte pane, budeme si hrát!“. Dnes se budu věnovat novým poznatkům, kterých jsme od té doby dosáhl.

Program 3.0 Beta

Ke stáhnutí zde: <http://ulozto.cz/xcXGB19F/22-00-01-05-21-xlsx>

Stručně si popíšeme jak program funguje, Základním elementem "programu" je list, list má vždy vstupní a výstupní hodnoty. Vstupní hodnoty jsou která čísla jsou vyškrtnutá a které číslo škrtáváme teď. Začneme tím, že "jakoby" zadáme číslo 4. Program si vezme všechny čísla která jsou vyškrtnutá a $1 \times$ až $25 \times$. $25 \times$ až $25 \times$ je z důvodu optimalizace, počítám s tím, že ani jeden z hráčů není sebevrah a proto nejmenší číslo, co kdy bude někdo škrtat bude 4 (1, 2 a 3 se budou škrtat až budou všechny ostatní vyškrtnutá). Poté program zkontroluje u všech čísel do 100 jestli se vyskytují v tabulce. Poté vytvoří 2 řetězce: První o 100 členech, od 1 do 100, kde se buďto nachází 0 pokud číslo nebylo vyškrtnuto a čísla $x, y \dots$, pokud už tato čísla vyškrtnuta byla. A poté řetězec který vzniká změnou tohoto řetězce a to tak, že postupně jsou vynechána všechny prázdná místa a dostáváme řetězec pouze nevyškrtnutých čísel (krom 1, 2 a 3). Tyto krátké řetězce jsou pak dále posílány na další listy které vypočítávají scénáře. Poté jsou tato data exportovány do grafické podoby a na jeden souhrnný list.

Co je ale zajímavější, jsou zde pak dále další listy, které berou data z posledního listu po kterém někdo hrál a opakují stejný postup pro různá čísla, co zbyla (ty postupně berou z krátkého řetězce). Poté vytvářejí po každém scénáři krátký a dlouhý řetězec, které berou další listy. K pochopení pomůže obrázek na další straně:



Nejprve část C bere krátký řetězec s 10 prvními nevyškrtnutými čísly (bez 1, 2 a 3) z předchozího listu.

Poté část D bere dlouhý řetězec z předchozího listu a tak zjišťuje která čísla jsou vyškrtnutá.

Pak si všechny části E_1 až E_n berou stejný dlouhý řetězec, ale jiný prvek z krátkého řetězce (E_1 vždy 1. nevyškrtnuté číslo až E_n bere n -té číslo). A na konci každá část vytváří nový dlouhý řetězec.

Části F slouží na vytváření krátkých řetězců. A to tak, že ze seznamu vyškrtnutých čísel vytváří seznam nevyškrtnutých čísel a poté, pokud je před číslem v seznamu 0 (vyškrtnutá čísla jsou nahrazeny 0), je číslo posunuto dopředu.

A nakonec část A "shromáždí" krátké řetězce a část B shromáždí dlouhé řetězce. Tato poslední část je udělaná už jen pouze pro zpřehlednění při tvorbě programu.

A nakonec data odcházejí na další listy který celý proces opakují.

Problém je však následující, pokud vezmeme, že chceme vypočítat výsledek (kdo vyhraje) pro řetězec o délce n bude potřeba pro $n > 4$ a více, potřeba poměrně dost listů. Konkrétně, pokud by n bylo rovno 10, bylo by to 4037913 listů ($= \sum n! + (n - 1)! + (n - 2)! \dots + 1!$), což pokud používáte takové programy jako excel znamená, že tento program je nenapsatelný a, že vám tento program žádný počítač neutáhne a navíc $n = 10$ ještě není úplně dostačující. . . Takže jak to obejít? Tak z toho, že program bere vždy nejdříve první číslo vyplývá, že zde vznikne "větev" listů, které (pokud nejsou ještě

nejdou tato čísla vyškrtnutá) vyškrtnou čísla 4, 5, 6 a 7. Což bude znamenat, že se dostanou poměrně brzy k nějakému výsledku a tudíž listy, co by je následovali nejsou potřeba.

Pak mě napadlo, že celý proces bychom také mohli vzít i tak trochu odzadu: Zbývá nám poslední číslo na vyškrtnutí, jaké to bude? Jsou jen 4 čísla, co to mohou být: 4, 5, 6 a 7. A co dvojice čísel? Těch je 9 (není potřeba je vypisovat). Důležité zde ale je, že zatím, co dvojice 4, 6 vede k vítězství hráče co je na tahu, dvojice 6, 7 vede k vítězství hráče co na tahu není. Tudíž toto nám výrazně pomůže v tom ohledu, že počet listů by to zmenšilo přibližně na něco takového ($= \sum (n - 2)! + (n - 3)! + (n - 4)! \dots + 1!$) A navíc ještě odstraněné "větve" by celkový počet rovněž o něco snížili. Pak mě ale napadlo, že by se to chtělo podrobněji podívat na to jaká čísla jsou vlastně vškrtávána jako poslední:

Jaká čísla jsou vškrtávána jako poslední

Hned na začátek bych chtěl varovat, že se nejsem jistý jestli tento poznatek vůbec k něčemu je a vyskytuje se zde několik spekulací, ale přišlo mi to natolik zajímavé, že jsem se rozhodl, to sem zařadit. Asi nejlepší bude, když nejprve nakoukneme na další stranu. Vlevo nahoře je uvedeno jestli se jedná o dvojici, trojici, čtveřici nebo pěťici posledních čísel. V popisku sloupce se vždy nachází číslo, kterým skupina začíná a v popisku řádku kterým číslem pokračuje a poté, kolik takových skupin existuje. V místě mocnin těchto čísel je pak napsáno, zastoupení mezi jednotlivými třetími čísly skupin.

1	4	5	6	7	1	4	5	6	7
–	1	1	1	1	–	1	1	1	1
2	4	5	6	7	2	4	5	6	7
5	1				5	1			
6	1	1			6	1	1		
7	1	1	1		7	1	1	1	
8	1				8	1			
9	1	1			9	1	1		
3	4	5	6	7	3	4	5	6	7
5	$6^{1,1,1,1,1,1}$				5	7			
6	$4^{1,1,1,1}$	$3^{1,1,1}$			6	5	4		
7	$2^{1,1}$	$2^{1,1}$	1		7	3	3	2	
8	1^1				8	2			
9					9	1	1		
4	4	5	6	7	4	4	5	6	7
5	$18^{7,5,3,2,1}$				5	25			
6	$8^{4,3,1}$	$5^{3,2}$			6	13	9		
7	2^2	2^2			7	5	5	2	
8					8	2			
9					9	1	1		
5	4	5	6	7	5	4	5	6	7
5	$41^{24,12,4,1}$				5	66			
6	$10^{8,2}$	$7^{3,2,1}$			6	23	16		
7	2^2	2^2			7	7	7	2	
8					8	2			
9					9	1	1		

pozn: $41 = 24(8, 6, 4, 3, 2, 1) + 12(5, 4, 2, 1) + 4(3, 1) + 1(1)$

pozn: $10 = 8(4, 3, 1) + 2(2)$

Můžete si zde všimnou poměrně zajímavé věci a to, že pokud se například podíváme do čtveřic do buňky ("4"; "5"), vidíme zde: $18^{7,5,3,2,1}$ (V mocnině je zapsáno zastoupení jednotlivých čísel na 3. místě) a pokud se podíváme mezi trojice do sloupečku "4" vidíme zde čísla 6, 4, 2, 1. A pokud porovnáme tyto řetězce: 7, 5, 3, 2, 1 a 6, 4, 2, 1, vidíme, že zde je něco jako +1 pravidlo. Podobnou závislost můžeme najít na více místech tabulky. Velmi zajímavý je přechod k pěticím, kdy vlastně řešíme čísla na 4. místě a zjišťujeme, že je zde rovněž +1 pravidlo. Bohužel se mi nepovedlo najít nějaké univerzální pravidlo nebo alespoň pravidlo pro každou z buněk abych mohl vzorcem vyjádřit, kolik čísel bude n -tém stupni.

Napadlo mě, že by ale mohlo být zajímavé se na jednotlivé skupiny podívat a zajistit, kdo jakou skupinu vyhrává a zda se z toho dá něco vysledovat (Zároveň se zde také nabízí možnost tyto poznatky aplikovat při tvorbě nějakého programu). Výsledky bádání vypadají do trojic velmi pěkně a to takto (**tučné** písmo znamená, že vyhrál hráč, který se k tomuto řetězci dostal jako 1.; *kurzíva* znamená, že vyhrál ten druhý):

1	4	5	6	7
–	1	1	1	1
2	4	5	6	7
5	<i>1</i>			
6	<i>1</i>	<i>1</i>		
7	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	
8	1			
9	1	1		
3	4	5	6	7
5	6^{1,1,1,1,1,1}			
6	4^{1,1,1,1}	3^{1,1,1}		
7	2^{1,1}	2^{1,1}	1	
8	1¹			
9				

Jak vidíme, tak v případě jednoho čísla vyhrává první hráč, stejně tak jako u tří. U dvou čísel je tabulka rozdělená a to u čísla 8, což je násobek 4, což souvisí s tím, že dvojice pak jde vyškrtnou celá najednou. Otázka je, zda se dá nalézt nějaká posloupnost, což bude předmětem dalšího zkoumání.

1.3 M&M XXII. ročník; 1. téma; 3. příspěvek

-

V předešlých číslech jsem odvodil několik základních pravidel hry a věnoval se různým programům a pozoroval jaká čísla jsou vyškrtávána jako poslední.

Program 4.0

Důležitého průlomů jsem dosáhl v psaní mých programů. První programy dělali v zásadě to, že nejprve měly řetězec nevyškrtnutých čísel a poté ke všem těmto číslům bylo vyškrtnuté číslo několikrát přičteno a vznikly všechny možné kombinace a potom bylo vzato jedno číslo za druhým a hledáno jestli bylo vyškrtnuto.

Tento proces byl však ale poněkud zdlouhavý, například pro 500 čísel a 10 tahů trval výpočet k 15 s. Podařilo se mi však přijít se složitějším algoritmem, který je však mnohem rychlejší, je tak rychlý, že počítal 1000 čísel a 50 tahů za přibližně 3 s.

Nebudu zde celý algoritmus popisovat, ale představíme si hlavní princip. Vezměme hru 4, 7. Zbude nám 5, 6, 9, 10, 13, 17 (a samozřejmě 1, 2 a 3, ale u těchto čísel předpokládáme, že vyškrtá nejsou, jinak by už hra přeci skončila). A řekněme, že jsme škrtnli 9. A nyní co udělá algoritmus? Algoritmus má něco jako kroky. Nejprve se podívá jestli rozdíl čísel ($5 - 9$) je záporný, v tomto případě je, takže číslo se neškrtá, dále máme $6 - 9$, to je též záporné, poté jestli se čísla nerovnají ($9 = 9$). Takže číslo se škrtá. A nakonec přichází poslední a nejsložitější krok, musíme nějak vymyslet, jak škrtnout 13 a 17. A nyní: Když bude škrtnuto číslo o 9 menší než 13 (4), tak 13 bude škrtnuto (4 je škrtnuto, 9 též $4 + 9 = 13$). Tudíž, my se po podíváme zpět na čísla, co byla škrtnuta, tak z toho můžeme zjistit, jestli je číslo škrtnuto nebo ne. Dále pak od 17 odečteme 9, to je 8, 8 je škrtnuto, 17 je škrtnuto.

Za povšimnutí stojí, že algoritmus je výrazně složitější, ale délka celého výpočtu se snižuje (dříve by se dala náročnost vypočítat asi jako ax^4 , zato teď bx^3 , z toho vidíme, že pro $x = 1000$ bude druhý výpočet rychlejší, jelikož a i b , je přibližně ve stejném řádu)

A nyní se podíváme na to, jak funguje předpověď toho, kdo vyhrál. První důležitý prvek je databáze, je to nově přidaný prvek a využívá posledních škrtnutých čísel z konce mého minulého příspěvku. Ve zkratce: představme

si, že nám zbývají poslední 2 čísla na škrtnutí. Jaké dvojice to mohou být? [4; 5], [4; 6], [4; 7], [4; 8], [4; 9], [5; 6], [5; 7], [5; 9], [6; 7]. A teď si představme, že jsme se dostali do jedné z těchto situací, je pro nás hra vyhraná nebo prohraná? To se dá zjistit experimentálně (To koneckonců není pro 2 poslední čísla tak těžké zjistit). A nyní zaneseme všechny tyto data do databáze, která je zakóduje tak, abychom je mohli později využít.

Nyní se opět vraťme ke hře 4,7. Zbývá 5, 6, 9, 10, 13, 17. Program má několik úrovní, nejprve se načte řetězec 5, 6, 9, 10, 13, 17.² Tento řetězec se zkopíruje do první úrovně, kde několik (10) podprogramů (několik na sobě nezávislých částí, které něco počítají) si nejprve opět zkopírují řetězec a pak každý podprogram škrtně jiné číslo a provede výpočet. Poté jsou opět z řetězce vypuštěny vzniklé mezery. Nakonec podprogramy předají vypočtená data podprogramům o úroveň níže (těch je o 1 méně, jelikož pokud jsme měli 10 čísel, tak jich teď máme nejvíce 9 a poslední podprogram by se "nudil" a to nechceme :-). Vznikne nám takový "strom".

Program má několik úrovní pokud jsme na začátku měli nějaká čísla a podprogram mám několik úrovní, tak nám zbyla nějaká čísla, jak z toho ale dostaneme, kdo vyhrál? Na konci každého podprogramu máme nějaký řetězec. A když ten dohledáme nějak v databázi tak máme vyhráno! Tudíž zakódujeme náš řetězec co máme na stejný formát jako je databáze.³ Program tedy zakóduje řetězec, přičte 1 podívá se jestli v databázi něco takové je, jestli ano, tak vyhrál hráč, co táhl, pak zkusí přičíst 2 a zkusí ji najít. Na úrovni se děje pouze toto. Pokud je vyškrtnuto dostatečně čísel, tak nám každý podprogram dá nějakou odpověď. Jinak pokud se program nedokáže rozhodnout dá 0 a pokud jsou všechny čísla škrtnutá tak 3.

Poté jde program o úroveň výše podívá se do databáze a řekneme, že nic nenajde a teď: Pokud existuje podprogram v nižší úrovni, kde vyhraje hráč co není na tahu (jelikož to je ten hráč, co teď na tahu je), tak hráč co je teď na tahu bude hrát tuto variantu, aby vyhrál. Pokud všechny varianty

²O práci s řetězcí jsem psal dříve, ve zkratce stačí říci, že máme řetězec všech nevyškrtnutých čísel s nulami (1, 2, 3, 0, 0, 6, 7, 0 (kde 0 je vyškrtnuté číslo)) a ten změním na řetězec, kde máme pouze nevyškrtnutá čísla. (1, 2, 3, 6, 7, 11)

³V našem případě je databáze konstruována na 5 čísel, vezměme 6, 7, 11, kdo se dostane k této kombinaci, tak vyhrál, napíšeme tedy 1, jako, že vyhraje hráč, co je na tahu máme tedy: 671100001 - první čísla jsou menší než 10 a další mají 2 místa.

vedou k vítězství hráče, co teď na tahu není, tak logicky vyhrál hráč, který na tahu není. Pokud by se ale vyskytovala 0 (nevěděli bychom, kdo vyhrál), tak pokud by mohl hráč co je na tahu vybrat pro něj vyhrávající scénář, tak se nic neděje, vyhrál. Pokud ale toto udělat nemůže, tak nevíme jelikož, co kdyby se pod 0 skrývala 1, tak bychom nebyli schopni předpovědět výsledek. Tudíž výsledek je pak 0.⁴ Poté jde program o úroveň výše a opakuje postup, dokud nedojde až k prvním podprogramům, z těch opět stejnou metodou vytáhneme výsledek.

A nyní víme jestli hráč co je na tahu vyhrál nebo ne a z toho už není takový problém (na základě počtu tahů) vytáhnout jestli vyhrál hráč 1 nebo 2.

Můžeme si všimnout, že pokud škrtneme poslední číslici, tak vždy ubereme poslední číslici, v extrémním případě vypadá tedy pouze 1 číslo. Aktuálně má program 4 stupně a databáze je do 4 čísel, takže program dokáže spočítat, kdo vyhrál pokud nám zbývá 8 a méně čísel.

Nakonec má ještě takový nápad: Co když hra není rozhodnuta do té chvíle, dokud vyškrtnutých čísel není konečný počet? Potvrzení toho výroku by znamenalo vítězství hráče č. 2. Ale toho je čistě diskutabilní...

Program 4.1

Aktuálně, s jistotou víme, kdo vyhraje pokud snížíme počet čísel, co zbývají na 8. Jak tento počet navýšit? Můžeme přidat nějaké stupně, to však výpočet prodlouží. Nebo můžeme zvětšit databázi (To vypadá docela přijatelně, ale bude to nejpracnější). A nebo si též můžeme všimnout, že pokud škrtneme poslední číslo, tak vypadá pouze jedno číslo, ale pokud škrtneme už předpředposlední, máme docela docela solidní šanci, že jich škrtneme více. (Nemám pro to vyložení důkaz, ale funguje to tak). Tudíž pokud by se program jen mírně rozšířil pouze na pár vhodných místech mohlo po přínést extra číslo nebo možná 2, což rozhodně není k zahoezení!

⁴Výskyt 3 řešit nemusíme, jelikož nehrozí, že by se do tohoto výběru dostala (vždy to ještě předtím zachrání databáze).

1.4 M&M XXII. ročník; 1. téma; příspěvek do M&M

Ano! Péťa měl dokonce článek v časopisu! :)

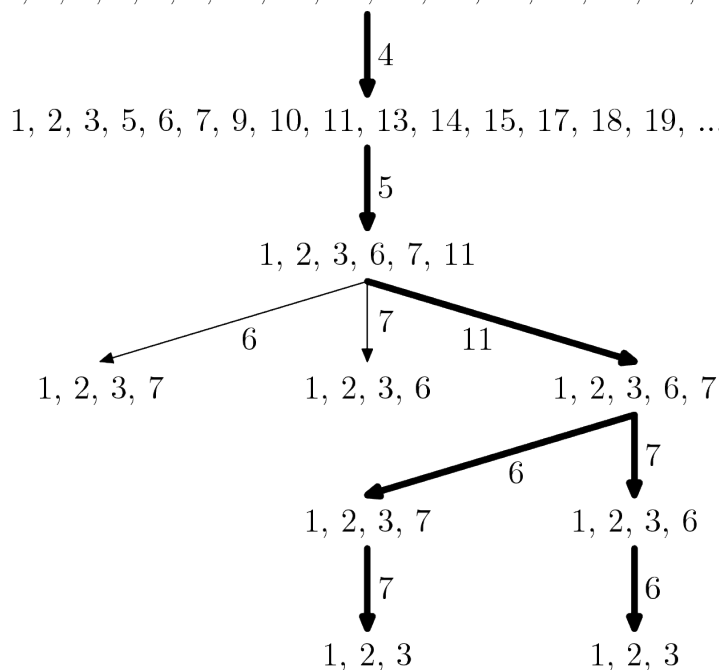
V tomto článku se budu věnovat základním pravidlům hry.

Určitě nic nepokážeme, když si nejprve cvičně zkusíme několik her. Můžeme si všimnout několika věcí:

- 1) Předpokládejme, že nikdo nechce prohrát (oba chtějí vyhrát).
- 2) Druhého hráče donutíme ke škrtnutí 1, tím, že mu škrtneme všechny ostatní čísla.
- 3) Pokud je vyškrtnuta 2 a 3, tak už zbývá pouze 1.
- 4) Pokud tedy druhý hráč škrtně jedno z těchto čísel, my škrtnáme to druhé a on pak musí škrtnat 1 (a naopak).
- 5) Zkutečným cílem hry je tedy donutit druhé hráče ke škrtnutí 2 nebo 3, tím, že mu škrtneme všechna ostatní čísla.

Je tedy na čase představit si nějakou konkrétní hru, například hru 4, 5 ze zadání.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ...



Na prvním řádku je výchozí situace (všechna čísla), na druhém po vyškrtnutí 4 (po tahu hráče 1) a na třetím je situace po vyškrtnutí čísla 5 (po

tahu hráče 2). A nyní má hráč 1 na vybranou ze 3 možností, může škrtnout 6 nebo 7, nebo 11. Po vyškrtnutí prvních dvou čísel nám už pak zbude pouze 1 číslo (1, 2 a 3 nadále nepočítáme). Po škrtnutí čísla 11 nám však zbývají ještě 2 čísla (6 a 7) a jak vidíme, tak hráč číslo 2 nemůže vyškrtnout obě tyto čísla naráz, tudíž tam jedno nechá a to vyškrtne hráč číslo 1 a vyhraje. A jelikož tedy ve 3. tahu (druhém tahu hráče 1) existuje možnost, jak on vyhraje, nebere si tuto možnost, kdy vyhraje a stane se vítězem.

Všimněme si však, že pokud škrtneme čísla 4 a 6, tak vyškrtneme všechna sudá čísla (až na 2, ale to nás tak nevzrušuje, vzhledem k tomu, že o číslech 2 a 3 se vlastně vůbec nebavíme). Ale to důležitější je, že nevyškrtnutých čísel je však nekonečně mnoho (všechna lichá). To je však větší problém a nám pro začátek bude stačit, když se vždy budeme zabývat uzavřenými skupinami. (Tedy zvolíme si nejprve několik čísel na začátek, která budou vyškrtnuta tak, aby byl počet nevyškrtnutých čísel konečný).

Všimněme si rovněž, kdy dostaneme uzavřenou skupinu: Když jsme škrtnuli 4 a 6, tak jsme ji nedostali, když škrtneme 8 a 4 tak rovněž ne a při 10 a 12 také ne. Ale i tak existuje pouze nějaké největší sudé číslo a ty nakonec vymizí, poté přijdou na řadu lichá. A po zvolení jakéhokoli lichého čísla se nám pak skupiny uzavře a jakmile je skupina uzavřená, hra musí skončit. Hra tedy musí skončit, ale nemůžeme říci kdy, počet tahů se může blížit k nekonečnu.

A nyní si představme, že jsme právě škrtnuli poslední číslo a zbývá už pouze 1, 2 a 3. Jsme ve vítězné pozici? Ano! A co když je v této pozici druhý hráč? Vyhrál? Ano! Jsme tedy v nevítězné pozici. A co když jsme v pozici, že všechny naše tahy vedou k vítězným pozicím druhého hráče? Poté jsme však v nevítězné pozici. Pokud ale nějaký z našich tahů vede k nevítězné pozici druhého hráče, tak naše pozice je vítězná! Můžeme se takto například dostat k číslům 6, 7 a 11. A takto samozřejmě můžeme jít dále a dále a dojít tak až k prvnímu tahu. Problém je, že to není nic jednoduchého. Ale vyplývá z toho, že pro jednoho hráče je hra vyhraná. Viz. důkaz Ernsta Zermela o tom, že hra dvou hráčů je pro jednoho hráče předem vyhraná.

Všimněme si, že pokud máme opravdu hodně čísel, tak je těžké a zdlouhavé rozhodovat se, která čísla jsou vyškrtnutá, jak se tedy můžeme snadno rozhodnout? Všimněme si, že pokud právě vyškrtneme nějaké číslo k , tak

pokud od čísla o které se zajímáme odečteme k , tak na základě toho jestli je toto číslo vyškrtnuto nebo ne můžeme snadno určit jestli je vyškrtnuté nebo ne. Tak můžeme i snadno zajistit, že nebudeme počítat s čísly se kterými nemáme.

1.5 M&M XXII. ročník; 1. téma; 4. příspěvek

-

V tomto čísle budu opět zkoumat která čísla jsou škrtnuta jako poslední. A jak můžeme poznatků tohoto problému využít.

Tabulka a použitý program zde:

<http://ulozto.cz/xT6AftCW/m-m-22-00-01-programy-3-zip>

Teorie skupin

Opět se vrátíme na začátek k tomu, že pokud nám zbývá řekněme jedno číslo na vyškrtnutí tak to může být pouze [4], [5], [6] nebo [7]. Pokud se dostaneme do nějaké z těchto situací vyhráli jsme (jelikož škrtneme poslední číslo, druhý hráč musí škrtnout 2 nebo 3, my škrtneme to druhé, on musí škrtnout 1 a prohrál). Pak můžeme řešit dvojice: [4, 5], [4, 6], [4, 7], [4, 8], [4, 9], [5, 6], [5, 7], [5, 9], [6, 7]. Vítězné jsou pro nás pouze [4, 8], [4, 9], [5, 9], ostatní ne, jelikož nejsme schopni škrtnout obě čísla naráz. A nyní všechny trojice: [4, 5, 6], [4, 5, 7], [4, 5, 8], [4, 5, 9], [4, 5, 10], [4, 5, 11], [4, 6, 7], [4, 6, 8], [4, 6, 9], [4, 6, 11], [4, 7, 8], [4, 7, 9], [4, 8, 9], [5, 6, 7], [5, 6, 9], [5, 6, 10], [5, 7, 11], [6, 7, 11]. Všechny jsou vítězné. To víme tak, že všechny jdou vyškrtnout úplně nebo na nějakou skupinu, která nejde vyhrát.

Takto můžeme pokračovat dále a zkusit všechny možné čtveřice, pětičky, šestice a sedmičky (a dále). Problém, se kterým se setkáváme však je ten, že počet těchto skupin narůstá velmi rychle. Konkrétně jejich počty jsou (pro zajímavost): 4, 9, 19, 35, 62, 112, 199. A celkem mají 2354 čísel, tudíž i 2354 možností, co s nimi můžeme udělat. Což je naprosto šílený počet, ale šíleným experimentováním se dá dospět k řešení každé z těchto skupin, není skupina která by nebyla $3 \times$ přepočítána a nevyšla by mi **stejně**, počítačově $2 \times$ manuálně $1 \times$. Nejprve jsem využil svůj starý program, uprostřed počítání jsem však objevil, že mi v jednom kroku vypadávala jedna hodnota. Mimochodem jsem na tom přišel tak, že při počítání sedmiček se mi neschodovaly výsledky šestek které vznikaly vyškrťáváním se šestkami, co jsem už měl v tabulce.

Po opravě jsem opět znovu vše prošel, zkontroloval jestli nevypadáva nějaká hodnota, kvůli chybě jsem už zahodil dny dat a další chybu jsem už opravdu nechtěl, program spočítal všechny jedničky, dvojky a trojky (skupiny o délce 1, 2, 3), tam jsme se ještě schodoval, vrátil jsem je do databáze

a pokračoval jsem 4, 5, 6, 7. Vše jsem pak přešel znova a nakonec jsem zkusil každou z variant jen s papírem a tužkou v ruce a v případě vyhraných skupin jsem se musel odkázat na nějakou prohranou skupinu a v případě prohraných skupin jsem musel zkusit všechny možnosti a najít, že jsou skutečně prohrané. Byl jsem pevně rozhodnut, provést tolik kontrol kolik bylo jen možné, abych si mohl být svými výsledky jistější než CERN. :-D A myslím si, že šance na správnost je opravdu velká, jako zajímavost bych ještě uvedl, že na zapsání toho všeho stačilo pouze 27 stran A4. :-D

Poté jsem se pokusil výsledky někam zanést do nějakého přehledu. Tento přehled najdete v příloze. Orientuje se v něm tak, že nejprve na řádku máme 1. číslo, potom na sloupci druhé, poté opět na řádku 3. na sloupci 4. a opět na řádku 5. na sloupci šesté a řádku 7. Modrá barva znamená, že skupina je vítězná, červená, že prohraná.

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
12	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
13	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
14	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
15	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
16	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
17	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
18	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
19	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Obrázek 1: Ukázka tabulky

Jak vidíme zde $[4]$ je vyhraná, $[4, 5]$ je prohraná, $[4, 5, 6]$ je vyhraná, $[4, 5, 6, 7]$ je prohraná, $[4, 5, 6, 7, 8]$ je vyhraná, $[4, 5, 6, 7, 8, 9]$ je prohraná, $[4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ je vyhraná atd. . . V tabulce je zaneseno všech 360 skupin. Jak si můžeme však ale všimnout, je zde pouze 67 skupin které prohrávají. Na ostatních listech (záložky dole) jsou ještě rozepsány menší skupiny samostatně.

Ale nyní vyvstává otázka: K čemu to vlastně chceme vědět? A odpověď není jednoduchá, hlavní důvody jsou 2: Zaprvé: Můžeme zvětšit databázi u programů a tím, zvýšit počet čísel, se kterými program dokáže počítat a to jen s malou ztrátou výkonu). Nebo zadruhé: můžeme se zde pokusit

najít nějaký vzor, nějaký vzor, který bude předpovídat, která kombinace je vítězná nebo prohraná. Najitím nějakého univerzálního vzorce, který by dokázal určit řetězec o n členech by se s největší pravděpodobností rovnal vyřešení problému. Hledáme tedy nějakou teorii skupin.

Dále bych ještě poznamenal, že máme popsány už skoro všechny počáteční 2 kombinace čísel. A ty poslední 4 kombinace prvních 2 čísel jsou $[4, 5, \dots]$, $[4, 6, \dots]$, $[5, 6, \dots]$ a $[5, 7, \dots]$. Všechny ostatní kombinace už máme popsány databází. Za zmínění stojí, že $[5, 7, \dots]$ je problém hry 4, 6 a jejích "dětí", tudíž kombinací, které vznikají přímo ze hry 4, 6.

Také bych upozornil na to, že pokud máme 1 zbývající číslo, poté největší možné číslo je 7, při 2 to je 9, při 3 to je 11, při 4 je to 13, při 5 to je 15, při 6 17, při 7 19 a při n , to bude $2n + 5$. Nedokážu přesně vysvětlit proč, ale pokud budeme chvíli studovat tabulky teorie skupin, tak to z ní vyplývá... Velkou roli ale hraje hra 4, 6. A u řetězce z po sobě jdoucích čísel $[4, 5, 6, 7, \dots]$ druhý násobek posledního čísla.

Záhada řetězce typu $[5, 6, 7, 10, 11]$

Všimněme si, všechny skupiny o délce 1 a 3 jsou vyhrané. 1 a 3 jsou lichá čísla, 5 je rovněž liché, zajímavé je, že všechny skupiny o délce 5 **až na jednu** jsou rovněž vyhrané, onou skupinou je $[5, 6, 7, 10, 11]$. Čím se tato skupina liší od ostatních? Zajímavé je, že prohraných skupin mezi 7 je také jen pár, ale jsou tam. Čím se tyto skupiny liší od ostatních? $[4, 5, 6, 8, 9, 10, 13]$, $[4, 5, 6, 8, 9, 13, 15]$, $[4, 5, 6, 8, 10, 11, 13]$, $[4, 5, 7, 8, 9, 10, 13]$, $[4, 5, 7, 8, 9, 10, 14]$, $[4, 5, 7, 8, 9, 11, 13]$, $[4, 5, 7, 8, 9, 14, 15]$, $[4, 5, 7, 9, 10, 11, 13]$, $[4, 5, 7, 9, 10, 11, 15]$, $[4, 6, 7, 8, 9, 11, 14]$, $[5, 6, 7, 10, 11, 14, 15]$ A proč je tolik vítězných tahů mezi lichými? Mezi sudými je to ještě docela vyrovnané, tak proč je mezi lichými tak velký nepoměr? Přeci jen u skupin o 7 číslech to je 11 z 199, což už je málo a u skupin o 5 číslech jen 1 z 62.

Využití poznatků teorie skupin

Na začátek je ještě potřeba zmínit, že jsem objevil to, že aplikace excel má i jiné funkce krom $+$, $-$, $\cdot$, $/$ a KDYŽ :-D, díky tomuto se mi podařilo dosáhnout toho, že se nyní dokáží odkazovat na konkrétní buňku a tudíž ne

nemusím například dívat do celého řádku jestli tam je 4 nebo ne, ale prostě se podívám do konkrétní buňky jestli tam 4 je nebo není. Toto nelze použít u druhé části výpočtu, kde simulujeme všechny možné tahy, ale i tak nám to hodně pomůže (Celý výpočet to opět zjednoduší o mocninu a každé další číslo je teď stejně náročné na výpočet jako předchozí, pravděpodobně jsme již dosáhli maximálního zjednodušení). Dále už také nepotřebujeme díky znalosti vzorečku $2n + 5$ počítat 100 čísel, jelikož víme, že to k ničemu není, ale pokud ukazujeme na výstupu n čísel, tak jen $2n + 5$. Ostatní stejně nejsme schopni zpracovat.

Další úpravu můžeme provést v databázi a to tu, že pokud máme popsané všechny skupiny do délky 7, tak nejprve pouze zjistíme jestli je vyškrtnut dostatek čísel a poté se podíváme do databáze, která však bude obsahovat pouze prohrané kombinace a pokud kombinaci nenajde tak jí bere jako vítěznou (to je velký risk, jelikož počítáme s tím, že všechny kombinace jsou určeny nejen správně, ale že jsme ani žádnou nezapomněli (toto jsem kontroloval asi 5×).

Co se mi ale zatím nepodařilo zrychlit je vypouštění mezer mezi jednotlivými čísly po škrtech. Toto zůstává nejnáročnějším procesem a jeho zjednodušení by přineslo důležité navýšení výkonu, už teď jsem schopen během zlomku sekundy spočítat výsledek řetězce o délce 11 čísel (pokud počítáme 1, 2, 3 tak 14). Nyní pracuji na dalším navýšení, ale jsem pouze v začátcích, určitě ale můžeme říci, že základním kamenem všech těchto výpočtů a pokroků je tabulka teorie skupin, bez které by jsme se jen stěží někam posunuli. Jako zajímavost ještě můžeme uvést, že výpočet 1 škrtu (když program zkouší experimentálně škrtat různá čísla) je teď víc než $1000\times$ rychlejší než na začátku (než první program který sám zkoušel nějaké škrtky). A kdybychom se znalostmi, co jsme měli na konci října zkoušeli psát podobný program, pak výpočet 11 čísel by trval 3 roky, nám nyní zabere jen zlomek sekundy. A já pevně věřím, že můžeme jít ještě o něco dále! :-)

1.6 M&M XXII. ročník; 1. téma; 5. příspěvek

-

V tomto čísle se budeme bavit o využití poznatků z tabulky teorie skupin, o novém programu a jak skončí hra 4, 6.

Ke stažení: <http://ulozto.cz/xCiKLnra/22-00-01-08-28-xlsx>

Program na 11 až 13 čísel

Na začátek se podíváme na provedené změny:

Technické změny

Oproti předchozím programům, je zde malá změna v krácení řetězců z dlouhých na krátké, v předchozí verzi to bylo děláno tak, že zde bylo děláno několik procesů za sebou, v každém z nich se číslo posunulo o 1 místo dopředu, pokud před ním byla mezera.

Nyní se mi to podařilo vyřešit tak, že pokud máme obecně řetězec čísel: 0, 0, 6, 7, 0, 0, 0, 11, 0... , a nyní pokud je zde 0, tak program vytiskne "" (nic) a pokud je zde nějaké číslo, tak 11 nechá 11 a 6 změní na 06 tak, aby zde byly 2 znaky. Poté všechno toto vytiskne za sebe a jelikož vyškrtnutá čísla jsou reprezentována "", tak se nám za sebe krásně seřadí nevyškrtnutá čísla, poté už pouze rozstříháme řetězec po dvou a máme jednotlivá čísla jak jdou za sebou (musíme nakonec opět převést na číslo).

V podprogramech se kóduje pozice na které nevyškrtnutá čísla zůstala a pak se na ně odkazuje, princip je ale stejný.

Metoda zanedbávání možností

Tato metoda je zatím pouze v testu, ale už teď můžeme s jistotou říci, že překvapivě nebude slepou uličkou.

V čem to spočívá? Nyní máme databázi všech možností, co mohou nastat pokud nám zůstane 7 a méně čísel, a máme 4 stupně podprogramů (to jak jsou podpogramy distribuovány je k nalezení k přiloženému programu). Takže bychom si na první pohled řekli, že nepíšeme klasicky program na 11

zbývajících čísel a budeme opět nějak něco testovat... Což od pravdy tak daleko není... :-D ale i tak jsem si opět vymyslel nějakou blbost, co docela překvapivě i kupodivu funguje... :-D

Normálně bychom začali s 11 čísly, ty v prvním stupni vyškrtali na 10 (a méně) atd. Ale pak jsem si všiml, že často vypadne i více čísel. A tak jsem vzal na začátek 13 čísel a udělal klasicky 4 úrovně, to ale znamená, že budou existovat místa, kde zůstane 9 čísel a my nebudeme umět určit jak to vlastně dopadlo. Ale pokud se podíváme na to, jak se rozhodujeme, tak vidíme, že ani nepotřebujeme znát všechny možnosti, jelikož pokud je zde nějaká možnost kde hráč, co bude hrát prohrál, tak hráč, co hraje vyhrál. Na druhou stranu na to, abychom měli jistotu, že hráč na tahu prohrál, tak musíme mít jistotu, že po žádném z následujících tahů nevyhrál.

Program byl už od začátku navrhnout tak, aby byl schopen vypsat, že se neumí rozhodnout, ale nikdy mu nebylo dovoleno vzít si tolik čísel, aby tato možnost mohla nastat. Tudíž toto rozšíření proběhlo bez problémů. A máme program, který určitě spočítá jak hra dopadla, pokud jsme nechali 11 a méně čísel a možná pokud je čísel 12 nebo 13. Pro vyšší počet (14+) je zde opět ochrana která opět vyhodí chybu výpočtu jako předtím.

Popravdě, nevěděl jsem, co od toho mám čekat, ale ukázalo se, že pro 12 čísel, to většinou funguje a poměrně často i pro 13 a možná to zkusím i časem pro 14.

Co tedy víme nového?

Nejprve začneme s počátečním tahem 4 (a zkoumáme druhé tahy – liché). Pokud hráč 2 škrtne 5, tak prohrál (hráč 1 škrtne 11). Pokud druhý škrtne 7, tak první 13. Pokud druhý škrtne 9, tak první 19. Pokud druhý škrtne 11, tak první 5.

Pokud zadáme do programu, 4, 13, tak nemáme vystup. A teď bych se chtěl zmínit o drobné vychytávce a to, že dole pod výpisem vidíme výpisy jednotlivých podprogramů a vidíme které jak dopadají, a pokud není dopočítány 1 nebo 2 z podprogramy, tak můžeme zkusit toto číslo škrtnout (to co jde do

podprogramu) a tak můžeme zjistit výsledek tohoto podprogramu a odvodit z něho výsledek celého výpočtu (sami).

Nezapomínejme, že vstupy do podprogramů, jsou oříznuté na 13 čísel, ale i tak jsou některé výstupy platné (pokud vstupuje méně než 13 čísel, tak jakýkoliv výstup je platný). To nám může pomoci, škrtneme 4 a 13 a vidíme, že horkým kandidátem na prohranou hru je 7, škrtneme 7, dostáváme se do prohrané hry, tudíž 4, 13 je vyhraná pro prvního hráče (vstup 4, 13, 7 už oříznutý není).

A nyní 4, 15, to je ještě o chlup složitější, pojďme tedy škrtnat jednotlivé kombinace a uvidíme jestli nenarazíme na prohranou a zjišťujeme, že žádná z her co můžeme spočítat není prohraná, ale na to abychom se mohli rozhodnout, tak nám to stejně nestačí.

Nyní se ale podíváme na 4,6. Zbude nám 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.... Můžeme si vytvořit malou tabulku:

vyškrtnuto	2 hrál	zbylo
4, 6, 5	7	
4, 6, 7	5	
4, 6, 9	11	5, 7
4, 6, 11	9	5, 7
4, 6, 13	15	5, 7, 9, 11
4, 6, 15	13	5, 7, 9, 11
4, 6, 17	19	5, 7, 9, 11, 13, 15
4, 6, 19	17	5, 7, 9, 11, 13, 15
4, 6, 21	23	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
4, 6, 23	21	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
4, 6, 25	27	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23
4, 6, 27	25	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23
4, 6, 29	31	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27
4, 6, 31	29	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27

Všechny tyto řetězce jsou prohrané. Tudíž všechny tahy hráče 2 byly vítězné. A podívejme na ty řetězce, co zbyly. Mají něco společného? Ano, vždy je tu lichý sudý počet po sobě jdoucích čísel. Můžeme dostat nějaký z těchto přímo z řetězce, co vznikne při hře 4,6? Ne, jelikož pokud škneme

číslo x , tak vždy zůstanou všechna čísla a k tomu ještě $x+2$. Tudíž nemůžeme dostat žádný z těchto řetězců přímo. A můžeme se z nějakého takovéhohle řetězce na nějaký jiný ne? Museli bychom škrtnou najednou 2 čísla vedle sebe, ale to nejde ($x, x+2$ zůstává). Tudíž dejme si předpoklad, že všechny tyto řetězce o sudém počtu po sobě jdoucích lichých čísel jsou prohrané a všechny ostatní jsou vyhrané. Tudíž pokud jsou všechny ostatní vyhrané, tak jdou zkrátit, na nějaký takovýhle řetězec a ano, buď to škrtneme poslední 1 číslo nebo poslední 2 čísla (x nebo x a $x-4$). A nyní víme, že tyto řetězce jsou prohrané, jelikož z nich nejde odkázat na nějaký prohraný řetězec, protože to jsou ty se sudým počtem po sobě jdoucích čísel. Všimněme si, že na první pohled jsme toto tvrzení dokázali na základě důkazu onoho samého, ale ve skutečnosti jsme to dokázali pro nějaká čísla, na základě jim předcházejících čísel, která jsou dokázána na základě jim předcházejících čísel, až se odtávám k číslům, která známe, pro která to platí. Tudíž ten, kdo vyškrtne řetězec na řetězec o sudém počtu po sobě jdoucích čísel tak vyhrál. To je hráč 2, hráč 1 tedy ať udělá co udělá, tak se dostává do situace, kdy prohrál. Tudíž hra 4, 6 je vyhraná pro hráče č. 2. Hráč č. 1 tedy nesmí začínat 4!

Tím se nám podařilo vyřešit i příbuzná hry 4,6, například 6,8, hráč č. 1 škrtne a převádí vlastně problém na hru 4,6.

Nadále si zavedeme nový pojem a budeme mu říkat důkaz a bude vypadat tak, že první 2 čísla budou čísla, která si zvolíme pro začátek hry a 3. číslo bude to, které hráč číslo 1 škrtne, aby vyhrál (pokud to nepůjde, tak řekneme, že důkaz neexistuje (např hra 4,6)). Aktuálně známe důkazy: [4, 5, 11], [4, 6, neexistuje], [4, 7, 13], [4, 9, 19], [4, 11, 5], [4, 13, 7]. Podívejme se tedy na hry začínající na 5: [5, 4, 11], [5, 6, 19], [5, 7, 8], [5, 8, 7], [5, 9, 31], [5, 11, 4]. K předposlednímu řešení se můžeme dostat drobným experimentováním. Pro číslo 6 nám stačí znát důkaz [6, 4, neexistuje]. A pro číslo 7: [7, 4, 13], [7, 5, 8], [7, 6, 16], [7, 5, 8], [7, 8, 5]. Pro 8 [8, 7, 5]. Všechny známé tahy si zaneseme do tabulky a pár si jich přidáme (tabulka na poslední straně).

důkaz	vyhrál	důkaz	vyhrál	důkaz	vyhrál
4, 5, 11	1	7, 4, 13	1	19, 4, 9	1
4, 6, -	2	7, 5, 8	1	19, 5, 6	1
4, 7, 13	1	7, 6, 16	1	19, 6, 5	1
4, 9, 19	1	7, 8, 5	1	19, 8, 6	1
4, 10, 6	1	7, 13, 4	1	19, 9, 4	1
4, 11, 5	1	7, 16, 6	1	20, 4, 6	1
4, 13, 7	1	8, 4, 6	1	20, 6, 4	1
4, 14, 6	1	8, 5, 7	1	22, 4, 6	1
4, 18, 6	1	8, 6, 4	1	22, 6, 4	1
4, 19, 9	1	8, 7, 5	1	24, 4, 6	1
4, 22, 6	1	8, 19, 6	1	24, 6, 4	1
⋮		9, 4, 19	1	26, 4, 6	1
5, 4, 11	1	9, 5, 31	1	26, 6, 4	1
5, 6, 19	1	9, 19, 4	1	28, 4, 6	1
5, 7, 8	1	9, 31, 5	1	28, 6, 4	1
5, 8, 7	1	10, 4, 6	1	30, 4, 6	1
5, 9, 31	1	10, 6, 4	1	30, 6, 4	1
5, 11, 4	1	11, 4, 5	1	31, 5, 9	1
5, 19, 6	1	11, 5, 4	1	31, 9, 5	1
5, 31, 9	1	12, 4, 6	1	32, 4, 6	1
6, 4, -	2	12, 6, 4	1	32, 6, 4	1
6, 5, 19	1	13, 4, 7	1	34, 4, 6	1
6, 7, 16	1	13, 7, 4	1	34, 6, 4	1
6, 8, 19	1	14, 4, 6	1	36, 4, 6	1
6, 10, 4	1	14, 6, 4	1	36, 6, 4	1
6, 14, 4	1	16, 4, 6	1	38, 4, 6	1
6, 16, 7	1	16, 6, 7	1	38, 6, 4	1
6, 19, 5	1	16, 7, 6	1	40, 4, 6	1
6, 20, 4	1	18, 4, 6	1	40, 6, 4	1
6, 22, 4	1	18, 6, 4	1	⋮	
⋮					

Jak si můžeme všimnout, někde se jedná pouze o prohozené pořadí tahů. A co mají všechny tyto kombinace mají až na 2 vyjímky něco společného a to vítězství hráče č. 1. V čem se ale tyto 2 vyjímky liší od ostatních? Odpověď je překvapivá a to, že v po prvním tahu hráče 2 je ještě stále nekonečný výběr

tahů. Co když prohrává hráč, který zmenší počet možných tahů na méně než nekonečno? Neříkám, že to tak je nebo, že by tomu mělo něco naznačovat, ale při interpretaci dat nás to může napadnout. Co by to znamenalo? Představme si, že hráč číslo 1 hraje 5, co má udělat hráč č. 2, aby hra nebyla uzavřena? Nic, nemůže dělat nic, hru svým tahem tak jako tak uzavře. Vyhrál hráč č. 1.

Možnosti vyřešení problému

Aktuálně se nabízí několik možností jak celý problém vyřešit:

Tabulka teorie skupin

Podaří se nějak objasnit jak se dále vyvíjí tabulka teorie skupin z minulého čísla, stejně jako jsme vyřešili problém hry 4, 6.

Výsledek: ?

Potvrzení teorie uzavření hry 5

Jedná se o teorii, co jsme si představili jen o pár řádků výše a to, že hru prohrává hráč, který hru uzavře (omezí počet možných tahů na reálné číslo).

Výsledek: vyhrál hráč č. 1.

Teorie nekonečného množství možností

Dokud nemáme uzavřený počet možností, tak máme na výběr z nekonečna variant, proč by se zde neměla nacházet žádná kombinace, kterou hru uzavřeme a vyhraje.

Výsledek: vyhrál hráč č. 2 (uzavírá hru).

Z toho plyne, že nyní je na čase postupně tyto teorie vyvracet nebo nějakou z nich potvrdit/vyřešit. To co z objevených vlastností se nakonec ukáže jako klíčové však ještě schopni říci nejsme.

1.7 M&M XXII. ročník; 1. téma; 6. příspěvek

-

Stanovme si předpoklad: Vyškrtnutí čísla 5 je vítězný tah pro hráče 1. Potom ale žádný z tahů hráče číslo 2 nesmí vést k vítězství.

Ke stáhnutí: <http://ulozto.cz/xso6ER2D/m-m-programy-k-6-prispevku-zip>

Na začátek: musí být tahem hráče č. 2 hra uzavřena? Ano. (viz důkaz Mariana Poljaka nebo důkaz Dominika Krasuly). Jelikož 5 je prvočíslo, tak s ním jsou soudělné pouze jeho násobky, ty jsou však již vyškrtnuté, tudíž se nedají hrát. Hra bude příštím tahem uzavřena.

Nyní se přesuňme zpět k programu. Máme zde databázi všech možných skupin, pro které nelze vyhrát např. ty začínající na [6, 7]. Obecně by se daly skupiny rozdělit do několika kategorií podle jejich prvních 2 čísel. [4, 5], [4, 6], [4, 7], [4, 8], [4, 9], [5, 6], [5, 7], [5, 9], [6, 7]. Z nichž je výrazně nejpočetnější [4, 5]. Ale co když začneme hru tahem 5? Poté se nikdy nedostaneme k žádné skupině začínající 5 nebo k nějaké, kde se vyskytuje 5. Zbývá nám tedy: [4, 6], [4, 7], [4, 8], [4, 9], [6, 7]. A nyní přichází pravá síla databáze, jelikož neexistuje řetězec delší než 7 čísel, který by začínal na [4, 7], [4, 8], [4, 9] nebo [6, 7], tudíž všechny tyto řetězce máme popsány a nemusíme je dále řešit. Zbývají nám už jen řetězce začínající na [4, 6], těch je bohužel nekonečně mnoho, ale za začátku jich tolik není. Za chvíli je prozkoumáme podrobněji.

Během přemýšlení toho jak dokázat náš výrok (že hry začínající na 5 všechny vyhrávají) mě napadl důkaz jiného výroku a to toho, že pokud máme n zbývajících čísel, tak největší číslo je $2n + 5$ – pokud nepočítáme 1, 2, 3. Pokud ale započítáme i 1, 2, 3. tak se nám vzoreček mění na $2n - 1$ (n bude vždy o 3 větší musíme tedy 6 odečíst). Funguje to? zkusme se to pro jedno číslo: 1 – je to pravda, pro 2 – 3 – pravda, pro 3 – 5 – pravda, pro 4 – 7 – pravda. Z čeho to vyplývá? Přestavme si, že si za sebe seřadíme n nejmenších čísel, řekněme 8. A poté přičteme k poslednímu 1 a máme 9. Může tato kombinace existovat? Vzhledem k tomu, že nejmenším škrtnutým číslem je teď 8, tak nemůže čísla menší než 16 nijak ovlivnit (když je samo), stejně tak 9, jelikož na to aby mohlo ovlivnit čísla menší než 16 potřebuje něco menšího než 8 (třeba 7, ta ale zůstává), stejně tak 10 potřebuje 6 atd. Můžeme tedy k poslednímu číslu stále přičítat 1 a mít jistotu, že ta kombinace může existovat, až se dostaneme k hraničnímu číslu 15, které lze též vyjádřit jako $2n - 1$. Větší poslední číslo už dostat nemůžeme (kvůli 2. násobku 1. škrtnutého čísla (8)). Pro největší číslo na n -tém místě tedy platí vzoreček $2n - 1$.

Z toho vyplývá (teď opět nepočítáme 1, 2, 3), že největší čísla, jaká můžeme získat na jednotlivých pozicích jsou 7, 9, 11, 13, 15, 17...

Ale zpět k tématu, nejprve jsem zkoušel všechny skupiny do 7 (celkového počtu čísel 7), poté jsem zkoumal všechny do 11, které zbudou po vyškrtnutí 5. Celá dobu jsem to zkoušel tak, že jsem si vždy stanovil v mém programu nějaký počet čísel, které chci do simulace pouštět a poté jsem začal s tím, že jsem neměl vyškrtnutá žádná čísla (v druhém případě vždy pouze 5). Poté jsem si zapsal skupinu a její výsledek (celou dobu jsem měl ty, co šly do programu odlišené (tam jak mi to vypisuje čísla, co zbyla) a měl jsem také vytaženy z programu mezivýpočty, abych měl jistotu, že jde do programu správný počet čísel a že pracuje správně. Po zapsání 1. skupiny jsem škrtnl poslední číslo, které se nacházelo v předchozí skupině, jelikož se všechna čísla posunula, tak na poslední místo skočilo následující číslo, ale zároveň do programu šel stále požadovaný počet čísel. Po tom, co klesl počet čísel pod stanovenou hranici (pokud jsme dělali skupiny po 5, tak 5). Tak jsem všechna vyškrtnutá čísla smazal a škrtnl předposlední číslo a poté jsem opakovaně škrtnal poslední. Stejný postup jsem aplikoval dokud jsem se nedostal ke škrtnutí prvních čísel, tak, že už jsem další skupiny nedostával a měl jsem tak tedy jistotu, že jsem na žádnou skupinu nezapomněl, opakoval jsem to několikrát abych měl jistotu, že jsem na opravdu na nic nezapomněl (třeba i $4\times$, většinou bylo vše v pořádku už při 2. kontrole, jistota ale byla jistota (a ta samozřejmě rostla)). Měl jsem tedy poté seřazeny všechny všechny řetězce postupně od nejdelších po nejkratší, poté podle 1. čísel, podle 2., 3. atd (oněch 27 stran zápisů skupin z 4. příspěvku).

Všechny skupiny jsem si vypsal a přenesl jsem je do virtuální podoby (viz. příloha).

Poté jsem chtěl začít studovat vztahy mezi jednotlivými skupinami. Ale mám je správně poskládané? Během jejich studia mě napadaly možnosti jako psaní 1. čísla na 1. osu, 2. na 2. osu a 3. na 3. osu, ale kam bychom psali 7. číslo (do 7. dimenze?)? Pak jsem se na výsledky podíval a tak jsem si řekl, že takto to nedává moc smysl (měl jsem vypsanou skupiny a to jestli jsou vítězné nebo ne). Ale někdy (často) se dělo, že 2 sousední skupiny měly úplně jiné řešení, v jedné bylo řešení 4 v druhé 7 a 19 a třetí řešení neměla. Skupiny mezi sebou určitě musí být příbuzné, nebo musí jít jistě nějak seřadit. Ale

jsou spolu příbuzné ty sousední? A nemůžou být příbuzné i nějaké s jiným počtem čísel?

Začal jsem s tím, že jsem si vypsal všechny známe skupiny (nejdřív do 7 čísel). Nejprve jsem si však vypsal všechna čísla po sobě klasicky, ale dal jsem si mezi ně mezery, takže 6, 7, 11 zapisuji jako: 0, 0, 6, 7, 0, 0, 0, 11. Každé číslo jsem obarvil barvou podle toho jestli vedlo k vítězství nebo ne (ty co vedly tak zelenou a ostatní červenou). A nakonec jsem si vybral pole za řetězcem, kde jsem si označil jestli je vítězný nebo ne (je vítězný pokud je zde alespoň 1 vítězný tah).

Pustil jsme se do rovnání. Idea byla taková, že na konci se budou vyskytovat spíše ty delší skupiny. Poté mě napsal takový systém, že pokud zde nějaké číslo je, tak řetězec půjde na konec – lepší je konkrétní příklad, začátek mé tabulky vypadá takto:

–	–	–	7	–	–	–	–
–	–	6	–	–	–	–	–
–	–	6	7	–	–	–	–
–	–	6	7	–	–	–	11
4	–	–	–	–	–	–	–

4 je poslední, jelikož ve všech skupinách výše chybí, poté 7 je nejvýše, jelikož jí chybí 6. 6 je před 6, 7 kvůli 7, stejně tak 6, 7, 11.

Postupně jsem si vypisoval všechny skupiny až do těch o 13 číslech a dospěl jsem k tomu, co je v příloze. K interpretaci těchto dat se vrátíme ještě ke konci.

Mezi tím jsem zkoušel dělat další program a využívat toho, že znám všechny skupiny o maximální délce 13. Během toho jsem však přišel na to, že Excel nerozlišuje při detekci nic za 15. znakem (zkoušel jsem i čísla kódovat jako text a stejně se to nekamarádilo), bylo jasné, že musím data nějak zkomprimovat.

Nyní se tedy budeme bavit o komprimování našich řetězců, už víme, jakou nejmenší a největší hodnotu může mít číslo na nějakém místě. To ukazuje

tabulka níže:

v pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nejmenší	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
největší	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Nyní vyškrtneme 5, takže dojde k posunu nejmenších hodnot, největší hodnoty ale zákonitě musí zůstat stejné (bez posunu), navíc ještě budeme potřebovat 1 konfiguraci na to, že na n -tém místě se nenachází žádné číslo. Máme tedy takovouto tabulku:

pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nejmenší	4	6	7	8	9	11	12	13	14	16
největší	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
možných hodnot	4	4	5	6	7	7	8	9	10	10

Navíc pokud tedy používáme Excel, který nám vše po 15 zaokrouhluje, tak můžeme ještě použít šestnáctkovou soustavu. (jelikož 10 je v desítkové zabírá 2 znaky, v šestnáctkové pouze 1). Zakódujeme tak tedy více čísel a pro naše potřeby (13 čísel) nám to bude vždy krásně stačit. Navíc to ani není moc náročné na implemetaci, jelikož stačí tyto prohrané konfigurace zakódovat do databáze a poté vždy při vyhledávání hledat pouze onu kódovanou hodnotu (nemusíme provádět žádné dekódování).

Poté jsem zkusil sestavit program, který bude brát 33 čísel, a všechny je zkoušet a bude mít 3 podúrovně (né 4 jako normálně, jelikož 4 úrovně by měly asi 2 GB a navíc takovéto soubory ani Excel nepodporuje a vzhledem k tomu, že je od Microsoftu, tak ani není třeba další komentář... (dokonce to má i v názvu...)). Měl jsem tedy garantovaný výsledek pro 16 čísel (13 + 3), ale mohl spočítat až 33 (ve skutečnosti nenastane to, že by spočítal výsledek třeba pro 25. číslo, ale zato je benefit takový, že díky tomu, že na začátku bere 33 čísel, tak výstupy těch 1. podprogramů jsou vždy validní (dokud není více jak 33 čísel)). Jinak 33 čísel není náhoda, je to počet čísel, co zbudou po vyškrtnutí 19 (19 též není zvolena náhodně, ale o tom později).

V průběhu celého zkoumání jsem měl vždy problémy s tím, že občas někde něco uteklo nebo něco chybělo a najednou bylo potřeba všechna data

přezkoumat. V rámci optimalizace mě před nějakým časem napadlo, že by šlo "zatrhnout" program, aby předával řetězce dál, k dalším výpočtům, pokud ho najde v databázi. Mělo to za následek nemalé zrychlení (tak 30% až 40%). Ale teď mě napadlo, že pokud vše pracuje správně, tak musí výsledky rovnat, respektive pokud se nerovnají, je program chybný (respektive data, s kterými pracuje). Proto jsem tuto optimalizaci zrušil do každého podprogramu, který má pod sebou podprogramy jsem dal porovnání výsledku podprogramu a jeho podprogramů, pokud se výsledek lišil, tak se zde objevila ve speciálním poli "1". Poté jsem už pouze sečetl všechny tyto pole dohromady a pokud by zde bylo něco jiného než 0, tak je zde někde chyba. Poté už jen stačilo projet jednotlivé řetězce. Navíc to nebyla kontrola pouze toho jestli je řetězec určen správně ale jestli i řetězce, co vzniknou vyškrtnutím jsou správně určené. Čekal jsem katastrofu. Poté, co jsem to poprvé dal dohromady a hned první výpis byla 0, jsem radši vše ještě překontroloval a vše vypadalo správně, takže jsem se pustil do testování. Přeci jen bylo zde 320 skupin a celkem 3071 možností, co s nimi udělat a tedy celkem 3391 údajů. Skutečně důležitá byla správnost těch celkových výsledků těch skupin. Ty ostatní byly samozřejmě důležité, ale u nich se nám chyba nebude propagovat.

Poté jsem se pustil do analýzy skupin, které jsem si mezitím srovnal tak, jak jsem výše popsal. Nejprve jsem si všiml něčeho zajímavého u 4 a to, že by se dalo říci, že její výsledek je závislý na určitých číslech, respektive jejich přítomnosti. A to konkrétně na 6, 7, 11. Proč? Protože pokud 4 škrtneme, tak pouze tyto 3 čísla zbudou, tudíž budoucí výsledek se bude odvíjet od nich. Pokud si výsledky prohlédneme, tak můžeme vysledovat že: 6 a 7 jsou "pár" – aby 4 byla vítězná, tak musí buď 6 i 7 chybět nebo tu být. A 11 má takovou funkci, že musí chybět, pokud tu 11 je, škrtnutí 4 povede k prohře. A skutečně to platí pro všechny naše skupiny a pokud se nad tím zamyslíme, tak to i dává smysl.

A takováto pravidla si můžeme stanovit i pro další čísla, (zatím 4, 6, 7, 8, 9, 11, 19). Pro 19 jsem si ještě nejsem na 100% jestli jsou kompletní, jelikož máme skupiny do 13, a největší číslo, které nám zde může vyskytnout je 31, ale po vyškrtnutí 19 máme největší číslo 61 – tady je důvod toho, proč jsem ten program psal na míru číslu 19. Jinak proč je 19 lehčí než třeba 17? Protože řešením hry 19 je 6, což je malé číslo (to samo o sobě nic neznamená, ale prostě jsem to u ní něco vykoukal, zatímco u 17 ne). (Vzhledem k jed-

nomu pravidlu jsou ty pravidla asi kompletní, ale o tom později.)

Poté jsem si všiml zajímavého faktu: Máme nějakou skupinu a podíváme se jaké je nejmenší vyškrtnuté číslo (bez 5, 10, 15...), řekněme 6. A nyní si "jakoby" "virtuálně" tu 6 přidáme a spočítáme výsledek oné skupiny a je zajímavé, že výsledek tohoto výpočtu je přesně inverzní ke skutečnému výsledku, kde 6 chybí. Což trochu i dává smysl, jelikož vyškrtnutím této vitální 6 neškrtneme žádné další číslo, tudíž v naší skupině se nic nemění. Dostaneme tedy logický inverzní výsledek k tomu skutečnému.

Náš cíl je tedy více méně jasný a to sestavit nějaké obecné pravidlo (nebo pravidla na určování pravidel), podle kterých budeme schopni vyjádřit výsledek pro libovolné číslo. Z toho už nebude problém zjistit jestli je hra 5 vítězná. Jelikož ale toto pravidlo neznám, můžeme si ještě krátce představit známá pravidla pro čísla, co znám.

Jinak krátce k určování pravidel, jelikož nemáme žádné jejich znalosti, tak jsem výsledky projížděl a snažil se najít něco, co by sjednocovalo všechny vyhraná čísla (například, že zde je vždy 6 nebo 7, ale nikdy ne obojí) (Poté nebyl problém sepsat vzorečky v Excelu a s podmíněným formátováním nebyl problém dostat nějaké výsledky pro všech 320 kombinací). Původně jsem čekal, že najdu pravidla pro přibližně 99% všech čísel a pak budu zjišťovat že ty pro které mi to neseď jsou špatně určené, ale kupodivu se to nestávalo ⁵.

4: (6, 7) pár; 11 chybí (pár = obě čísla buď jsou nebo nejsou)

6: (4, 7) – pár; (8, 9) – pár; (13, 14) – pár; 19 – chybí

7: (4, 6) – pár; (8, 9, 11) - vyskytují se zde 2 z nich nebo žádné; 13 chybí

8: (6 nebo 7) chybí (ale zároveň jedno z nich je); (9, 11) – pár

9: (6, 7, 13) – 6 a 7 fungují jako "nebo" a nebo můžou být najednou, ale musí zde být 13; (12, 13, 16) – 13 a 16 fungují jako "nebo" a nebo pokud je

⁵Bylo to jako Fermiho paradox, ty chyby tam prostě nebyly :D Což mi ani trochu nevadilo :D Ještě to není definitivní, ale můžeme s **jistotou** (opravdu velkou možná snad i 100%) říci, že všechny čísla od **4 do 11** jsou určena správně :) S tím i inverzní situace, takže všechny skupiny, kde je vyškrtnuté číslo 11 a menší.

zde 12, tak musí být společně všichni; (8, 11) – pár; (17, 21) – pár; (22, 26) – pár; 31 chybí

11: 6 je; (4 nebo 7) chybí (ale zároveň jedno z nich je); (8, 9) – pár; 13 chybí

19 (– nevím jestli je kompletní, ale vzhledem k jeho pravidlům to je možné): (6, 11) – pár; (12, 16) – pár; (17, 21) – pár; 8 a 14 je; 22 není; 6 nebo 13 chybí (ale zároveň jedno je)

Nakonec by ještě mohla vyvstávat otázka, jestli by nemohlo existovat nějaké pravidlo pro 5 (že by byl výsledek skupiny inverzní k tomu virtuálnímu od 5). Odpověď je prostá, že by mohl a dokonce možná i je, ale bude pravděpodobně velmi komplexní a vzhledem k tomu, že máme problém určit i pravidla pro v celku malá čísla, tak k určení pravidel pro 5 máme pravděpodobně ještě daleko.

Po sepsání programu jsem ještě objevil, že řešením 12 je 33 (důkaz [5, 12, 33]) a dále důkaz [5, 13, 17], [5, 14, 18], [5, 16, 18], [5, 18, (14 a 16)]–poslední má 2 (objevená) řešení.

5, 4, 11
 5, 6, 19
 5, 7, 8
 5, 8, 7
 5, 9, 31
 5, 11, 4
 5, 12, 33
 5, 13, 37
 5, 14, 18
 5, 16, 18
 5, 17, 18
 5, 18, 14
 5, 18, 16
 5, 18, 17
 5, 19, 6
 5, 33, 12
 5, 37, 13

Máme tedy objevená všechna řešení do 20 (+ 2 extra), což byl taktéž jeden z cílů programu a naše teorie o tom, že 5 je vítězný tah stále stojí, na druhou stranu však ale nemáme nic, co by jí vyloženě podpořilo.

Malá vsuvka na závěr: jednu skupinu o délce 13, co nyní máme v databázi a můžeme jí znát okamžitě by trvalo prvním programem spočítat 468 let, skupiny o délce 16, u kterých máme nyní výsledek garantován 1 500 000 let a hru 6, 19 by trvalo spočítat $6,5 \cdot 10^{29}$ let. Což je $4,8 \cdot 10^{19} \times$ víc než je stáří vesmíru.

Pokud bych měl ještě odhadnout počet chyb: tak nejsem si jistý jestli tam nějaká je nebo není, ale myslím si, že tam není žádná fatální, jelikož pokud by tam byla tak bych nebyl schopen dát dohromady ty pravidla a některé věci, které dávají smysl by pravděpodobně smysl nedávaly. A pokud tam jsou tak to jsou spíše chyby toto typu, že jsme napsal, že vítězná je 21 ne 22, to jestli je celá skupina vyhraná nebo prohraná mám snad určeno správně (což je to nejdůležitější).

Jakže to můžeme shrnout tak, že hranice matematiky asi nikam posunuty nebyly, hranice programování též ne, ale mé myšlení snad jo, což si myslím, že by mohl být dobrý závěr mého 8-stránkového povídání :D

1.8 M&M XXII. ročník; 1. téma; 7. příspěvek

-

Minulý příspěvek začínal slovy: „Stanovme si předpoklad: Vyškrtnutí čísla 5 je vítězný tah pro hráče 1. Potom ale žádný z tahů hráče číslo 2 nesmí vést k vítězství.“

Všimněme si, že tentokrát není nic ke stáhnutí :D

Minule jsem mluvil o tom, že jde „virtuálně“ přidávat nejmenší vyškrtnuté číslo a tak zjišťovat inverzní výsledek. Zjistil jsem, že nejen nejmenší, ale že i jakékoliv, kdy by byla skupina „stabilní“. Názorně: Máme skupinu [4, 6, 7]. Stabilní by byla čísla 5, 8, 11, 12. Ale už ne 9, 10, 13. Poznáme to tak, že zkusíme číslo přidat a pak opět škrtneme čísla, která jsou škrtnutá a nesmíme vyškrtnout ono virtuální číslo.

Poté jsem hledal pravidla pro další čísla, moc úspěchů jsem neměl, podařila se mi sestavit část pravidel pro číslo 12. Poté jsem přemýšlel, že bych mohl zkusit sepsat si pár dalších skupin (asi do 17, ale jen ty, kde chybí 11 a 12) – což byla práce tak na 2 hodiny. Také mě napadlo, že bych mohl zkusit dát dohromady pravidla pro číslo 5. Také jsem se pokoušel najít podobnosti mezi různými pravidly, ale neúspěšně. Ještě než jsem chtěl začít, tak jsem si ještě řekl, že si nejprve ještě na chvilku odsednu od počítače a pak se to stalo...

Vezme si nějakou hru, třeba 5, 18. U ní už výsledek známe. Ale je zde ještě relativně málo čísel a tak to bude názorné:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
5	18																			Ready for future!																				
1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	16	17	19	21	22	24	26	27	29	31	32	34	37	39	42	44	47	49	52	57	62	67		0					
Vyhrál hráč č. 1!																																								

Už na první pohled vidíme, že řešením jsou tahy 14, 16, 17. Už dříve jsem si všiml, že velmi častým řešením je jedno z posledních čísel, co zbudou (viz. tabulka na straně 51), ony hry jsou dvojité podrženy. Poté mě napadla ona převratná úvaha, všimněme si posledních 4 čísel ve hře 5, 18. Je to 52, 57, 62, 67. Co je na nich zvláštního? Ať škrtneme jakékoliv z nich, tak škrtneme ty po něm – toto je klíč.

Všimněme si, že zde máme máme dokonce 4 čísla, pro která platí ono koncové vyškrťování, jejich počet dokonce časem roste (to částečně i vyplývá z důkazu o největším čísle), také si můžeme rozdělit čísla do čtveřic, oddělených

5, 4, 11
5, 6, 19
5, 7, 8
5, 8, 7
5, 9, 31
5, 11, 4
5, 12, 33
5, 13, 37
5, 14, 18
5, 16, 18
5, 17, 18
5, 18, 14
5, 18, 16
5, 18, 17
5, 19, 6
5, 33, 12
5, 37, 13

vždy násobkem 5. Když vyškrtneme nějaké číslo, tak počet zbylých čísel čísel v každé čtveřici bude postupně snižovat až klesne na 0. V několika posledních čtveřicích však zůstane 1 číslo a to bude vždy na stejném místě v oné čtveřici (1., 2., 3., 4.). Když škrtneme nějaké číslo z nějaké čtveřice, tak automaticky škrtnáme i ty čísla ve čtveřicích za ním. To má za následek efekt těchto koncových čísel, kterých bude čím dál více a více.

Pokud škrtneme libovolné číslo ze zbývajících, tak škrtneme i poslední číslo, tudíž na něm nemohou být ostatní čísla závislá/jejich výsledky (porušovali bychom tak pravidlo o inverzních situacích). A nyní pojďme projet všechny čísla až do poslední, buďto je mezi nimi nějaké vítězné (problém vyřešen), anebo není a my škrtneme poslední číslo. A tak dostáváme 2. hráče do situace, kdy se vítězenost žádného čísla nezměnila, tudíž všechny prohrávají. Náš tah byl tedy vítězný. Vždy se zde tedy bude nacházet alespoň jeden vítězný tah. Druhý hráč tedy nemá jak by nás obelstil, škrtnutí čísla 5 je vítězný tah! Hráč č. 1 má tedy vítěznou strategii.

1.9 M&M XXII. ročník; 1. téma; 8. příspěvek

-

V tomto příspěvku si ukážeme další ukázky toho, že můj důkaz je skutečně pravdivý a některé další věci které z toho vyplývají. Nakonec také zkusíme aplikovat poznatky na další hry.

Abychom si ulehčili výpočty, tak jsem připravil tabulku, kde se nejprve spočítají všechna zbylá čísla do 1000. Poté vezme každé číslo a zkusí ho škrtnout⁶, poté se testuje jestli zmizelo ve všech případech největší číslo. Můžeme zde pěkně vizuálně kontrolovat jestli můj důkaz opravdu funguje v praxi. Dále je zde vypsáno prvních 1000 čísel a ukázáno názorně jestli jsou vypočtena nebo ne. <http://ulozto.cz/xs8K6R7U/22-00-01-11-11-xlsx>

Abychom si shrnuli tedy důkaz: Tak škrtneme 5, druhý hráč škrtně libovolné číslo, které zbývá a uzavírá tím hru na konečný počet tahů (škrtnli jsme 2 nesoudělná čísla). A poté ať škrtneme libovolné číslo n , tak zároveň škrtneme poslední číslo. Jelikož toto číslo vždy škrtneme, tak na něm n nebude závislé. Jelikož výsledek naší hry se nemůže lišit v závislosti na výskytu tohoto čísla.⁷ Tudíž jeho škrtnutím neměníme výsledek předchozích her, tak můžeme svůj tah "zahodit" – tedy postavit druhého hráče do naší pozice, ale zároveň mu sebereme onu možnost zahodit tah.

Celé to stojí na tom, že ať škrtneme jakékoliv číslo, tak zároveň přicházíme vždy i o poslední číslo (celou dubu myslíme situaci po 2 tazích (po škrtnutí 5 a n)). Pojďme se podívat jak vypadá hra po škrtnutí čísla 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400
401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520
521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560
561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760
761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840
841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880
881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920
921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

⁶Ještě malá poznámka k programu: Je zde 1000 000+ hodnot k vypočtení a soubor má 7 MB, přesto však výpočet probíhá mnohem rychleji než když jsem měl stejně velký program, který pouze počítal výsledek pro 100 čísel na 10 tahů. (Nyní máme 1000 čísel a 1000 tahů) Odpovědí na tuto otázku je vylepšený algoritmus, který nový program používá, jelikož ten k vypočtení toho jestli je číslo škrtnuté nebo ne potřebuje výrazně méně operací. Navíc tento program počítá více než 1000× více údajů.

⁷Představme si hry 6, 7, 11 a 6, 7, v obou případech nás bude zajímat jak je na tom číslo 6 a v obou případech nám zbude pouze 7, tudíž výsledek bude stejný a výsledek škrtnutí čísla 6 tedy není závislý na 11.

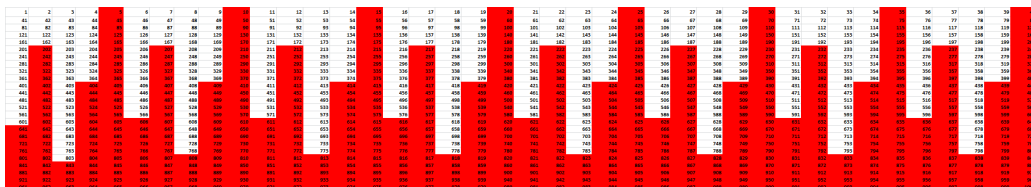
Hlavní věc je, že se nám zde objevují „ostrovy čísel“ – 1, 2, 3, 4 je ostrov, 6, 7, 8, 9 je ostrov a tyto ostrovy jsou odděleny čísly 5, 10, 15... Na základě toho můžeme všechna čísla dělit na 4 kategorie a to podle toho, na jakém místě se nacházejí ve svém ostrovu – 1. až 4. místo. Pojdme škrtnout nějaké číslo, vezmeme n třeba 201.

Jak vidíme, tak do 200 se s ostrovy nic neděje, ale pak se začnou zmenšovat a největším nevyškrtnutým číslem je 799. (doporučuji, zkusit si to i v příloženém souboru). Všimněme si, ostrovy se zmenšují postupně, nejprve vypadává z ostrovů 1. číslo, pak 2. pak 3. nakonec 4. A nyní se pojdme podívat na 1. čísla všech ostrovů, všimněme si, že jako první chybí 201, což je naše n . Když se podíváme na 2. číslo, tak jako první chybí 402, což je rovněž $2n$. Dále se podívejme na 3. místo ve skupině, tam je první škrtnuté číslo 603 ($3n$) a nakonec 4. číslo: 804 ($4n$).

Odpověď nacházíme v algoritmu škrtnutí čísel: „Číslo m je po škrtnutí čísla n škrtnuté pokud $m = n$ nebo $(m - k)$ je rovněž škrtnuté.“ Nyní si jen na chvilku představme, že nejprve škrtneme n a poté 5 (vyjde to nastejno). A když škrtneme číslo na libovolném místě v ostrově, poté budou škrtnuty i všechny následující čísla na stejných místech v ostrovech, zároveň ale ne na jiných místech (škrtnáme vždy čísla vzdálená od sebe 5, ani více, ani méně).

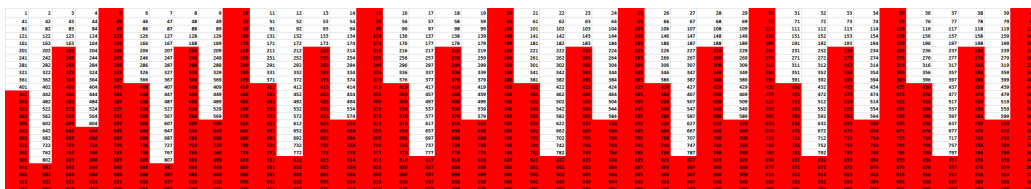
A nyní se opět můžeme vrátit k tomu, že 1. škrtnáme číslo 5 a druhé číslo n . Dále se podíváme jak se nám bude propagovat škrtnutí do dalších ostrovů. Jak si můžeme všimnout, tak nejprve jsme přišli o 1. číslo v ostrově, poté 2. poté 3. a nakonec 4. To je z toho důvodu, že postupně byla nejmenší čísla o 1 o 2 o 3 a o 4 větší než 0. číslo skupiny (0, 5, 10...) a měli jsme n , $2n$, $3n$ a $4n$. Tudíž vždy když škrtneme 1. číslo z ostrova, tak bude platit předchozí.

Nyní si zvolně $n = 202$:

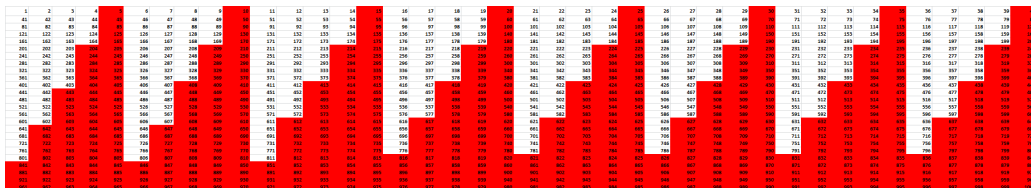


Jak vidíme tak nejprve přicházíme v ostrovech o 2. číslo, pak 4. pak 1. a nakonec 3. $n = 202$, $2n = 404$, $3n = 606$, $4n = 808$, Pokud může nám to přijít trochu nelogické, ale pokud si uvědomíme, že nám pořadí postupně narůstá, tak to máme 2., 4., 6.! a 8.! Jde o to, že se toto pořadí přenáší do dalšího ostrovu, tudíž ve výsledku pak dojdeme k tomu, že postupně ztrácíme 2., 4., 1. a 3. číslo (z tvaru 2, 4, 6, 8, se do 2, 4, 1, 3 dostáváme operací modulo pěti). Pokud se podíváme na data, tak skutečně vše sedí.

Dále zkusme $n = 203$:



Jak vidíme, tak opět ztrácíme v ostrovech 3. 1. 4. 2. číslo (3., 6., 9., 12.) $n = 203$, $2n = 406$, $3n = 609$, $4n = 812$ A pro $n = 204$:



Ztrácíme postupně: 4., 3., 2. a 1. (4., 8., 12., 16.). $n = 204$, $2n = 408$, $3n = 612$, $4n = 816$. Je naprosto logické, že všechny tyto poznatky můžeme aplikovat i na další (všechny) případy. Tudíž když škrtneme 1. číslo z ostrovu, tak to samé (stejný postup propagace škrtnání čísel) platí i pro další čísla.

Nyní už jen stačí dokázat, že při škrtnutí libovolného čísla škrtneme i poslední číslo. A je to velmi prosté, pokud škrtneme v nějakém předchozím ostrově číslo na stejném místě jako je to poslední, tak je jasné, že bude určitě škrtnuto. Pokud ne, tak nám dokonce pomůže ono číslo, které druhý hráč škrtnl při svém druhém tahu, jelikož díky němu dojde opět ke stejné propagaci, ale od čísla které škrtneme ve 4. tahu, které povede ke škrtnutí posledního čísla. . . VŽDY. . . Poslední číslo bude tedy vždy škrtnuto a tudíž na něm nemůže být žádné číslo závislé. Libovolná hra začínající 5 má tedy vždy alespoň jedno řešení. Hráč číslo 1 má vítěznou strategii.

Stejně zákony můžeme aplikovat i na hry začínající prvočíslly, nebudu zde vše rozepisovat, jelikož by toho bylo moc, je to zdlouhavé a naprosto stejné jako v předchozím příkladu. Navíc si to můžeme snadno ozkoušet jestli to platí v přiložené tabulce: pokud zde vyplníme 2 čísla a bude konečný počet čísel (největší číslo menší než 1000), tabulka otestuje jestli náš důkaz platí i na onu hru (třeba 7, 50. . .). Určitě už můžeme hned od pohledu říci, že něco podobného bude platit pro všechna prvočísla. Jelikož zde opět vzniknou ostrovy čísel a opět budou platit stejná pravidla. Dále také můžeme důkaz aplikovat i na některé další hry třeba i ty začínající na 4, (a pokračující něčím nesoudelným (4, 333. . .)) i když už některé výsledky známe. . .

Nyní si ještě ukážeme, vzoreček na výpočet největšího čísla při škrtnutí 2 čísel – nejprve ukážeme, poté odvození. Mějme 2 škrtnutá čísla m a n , řekněme $m = 5$ a $n = 201$, největším číslem bude 799. Můj vzoreček na výpočet největšího čísla je: $(m-1) \cdot (n-1) - 1$. Odvození je schováno v popisu propagace škrtnání čísel na určitých místech u 201 to je 1. 2. 3. a 4. a! 5., onu 5 už ale nevidíme, jelikož už je škrtnutá, tudíž zde máme jakoby 4 "periody" – nebo jak to chceme nazývat. Tudíž musíme od 5 odčíst 1 a to samé logicky platí i pro druhé číslo, nakonec musíme odečíst 1, protože takto bychom vypočítali 1. číslo, kdy se obě škrtnání potkávají. Tudíž vzoreček je: $(m-1) \cdot (n-1) - 1$ (A platí pro nesoudelná čísla (jak vidíme, tak očividně nebude třeba platit pro 4 a 6)).

1.10 M&M XXII. ročník; 1. téma; 9. příspěvek

-

V mém posledním čísle se budu především věnovat shrnutí poznatků. Dále ještě program v Pythonu, který za nás počítá to co jsme počítali celý rok manuálně.

Začněme programem, nejprve zde budeme potřebovat pole čísel od 1 do o , kvůli budoucím simulacím musíme začínat 1, jelikož poté by program počítal škrtnutí 0 rovněž za možnost a to nechceme jelikož to nejde.

Poznámka: jedná se o zjednodušenou verzi, poději jsem dopracoval další funkce jako, že se řetězec sám zkracuje na maximální nezbytnou délku a ošetření vstupů, ale pro jednoduchost si dovolím použít zjednodušenou verzi:

```
pole = [] #Vytvoří prázdné pole
o = int(input("Kolik čísel? ")) #Zeptá se kolik čísel má vypsát
i=0
j=1 #Abychom počítali od 1
for i in range(o):
    pole.append(j) #Přidá čísla od 1 do o do pole
    j=j+1
```

Dále si nadefinujeme funkci škrtnutí:

```
def skrt(rada, a): #Definice funkce a udání na kterém poli má být
    proveden jaký skrt
    k=0
    for k in range(o): #for cyklus, který projde všechny čísla
        if rada[k]==0: #Nebude řešit již škrtnuté číslo
            k=k+1 #Přejde k dalšímu číslu
        elif (k+1)<a: #Nebude řešit menší čísla než škrtnuté
            k=k+1 #Přejde k dalšímu číslu
        elif (k+1)==a: #Škrtně škrtnuté číslo
            rada[k]=0
        elif rada[k-a]==0: #Škrtně čísla větší o škrtnuté číslo než již
            škrtnuté číslo
            rada[k]=0
        else: #Ostatní nechá být
            k=k+1 #Přejde k dalšímu číslu
```

```
return rada #Vrátí zpět proškrtaný řetězec
```

Nyní budeme potřebovat pro budoucí účely funkci, která nám zjistí, jestli je řetězec úplně proškrtaný, či zde ještě něco zbývá:

```
def nula(skupina0): #Zjistí jestli jsou všechny čísla vyškrtána
    c=list(skupina0)
    if c[0] == 1: #Aby bylo vše vyškrtáno, musí být škrtnuta 1
        return 0 #Pokud není, vrátí 0
    else:
        return 1 #Pokud je řetězec proškrtán, tak hráč, co by měl právě
        táhnout, tak vyhrál
```

Dále budeme potřebovat ukládat skupiny do databáze (slovníku), nemůžeme však pro tento účel použít list čísel, musíme předtím převést tento list do formátu string (jednoduše vytiskneme všechna čísla za sebe, každá skupina bude mít tento řetězec unikátní = nemůže dojít ke spletní/záměně):

```
def konvertovat(listretezec):
    retezce = "".join(str(z) for z in listretezec)
    return retezce
```

Následuje hlavní funkce a to je funkce která nám bude rekurzivně provádět výpočet:

```
def propocet(skupina): #Dostane skupinu
    l=0
    m=max(skupina) #Zjistí největší nevyškrtnuté číslo
    while l < m: #Dokud jsme nepřekročili největší číslo
        b = list(skupina) #Vytvoří kopii pole, aby jsme neprováděli
        úpravy v původním poli
        if b[l] == 0: #Pokud je číslo škrtnuté, tak skáče k dalšímu
            l=l+1
        else: #Pokud ještě číslo není škrtnuté:
            c=list(skrť(b, (l+1))) #Provede škrť na kopii řetězce u čísla
            na kterém se aktuálně nacházíme
            d=nula(c) #Zjistí jestli jsme škrťli všechna čísla
            if d==1: #Jestli ano:
```

```

        if l==(m-1): Pokud to bylo nejvyšší (=poslední) číslo, tak
        hráč právě prohrál a celá funkce vrací hodnotu 2
            return (2, l)
        else: #Funkce skáče k dalšímu číslu
            l=l+1
        else: #Jestli jsme ještě neškrtili všechna čísla:
            g=konvertovat(c) #Teď určitě víme, že budeme hledat/zapisovat
do slovníku, proto konvertujeme naši skupinu (vytvoříme její kopii) do potřebného
formátu string
            try: #Zkusíme jestli už známe výsledek skupiny
                d=slovník[g] #Pokud známe výsledek, tak dostaneme
zpět ho dostaneme
            except KeyError: #Pokud výsledek neznáme dostaneme
zpět KeyError, ten tímto ošetřujeme
                d, e=propocet(c) #Pokud výsledek skupiny neznáme,
tak si rekurzivně opět zavoláme tuto funkci aby nám vypočítala výsledek
                slovník.update(g:d) #Provedeme update slovníku, aby
až příště narazíme na tuto skupinu už mohli dohledat výsledek
            if d==1: #Pokud hráč co bude na tahu vyhrává:
                if l==(m-1): Pokud to je poslední možnost tak hráč,
co je aktuálně na tahu prohrál:
                    return (2, l)
                else: #V případě, že to není ještě poslední číslo, tak
jdeme k dalšímu číslu
                    l=l+1
            elif d==2: #Pokud povede tak k prohře protihráče, ta
povede k výhře aktuálního hráče
                return (1, l) #Funkce vrátí informaci o tom, že aktuální
hráč na tahu je vítězem skupiny a rovněž vrátí i informaci o tom, kde se za-
tavilo počítadlo while funkce (které číslo jsme škrtili)

slovník = {} #Založí prázdný slovník skupin a jejich výsledků

n=0 #Vytváří nekonečný cyklus, která se nás neustále bude ptát jaké
číslo chceme škrtnout/se bás bude ptát na instrukce
while n<1:
    x = input("Škrtneme? ") #Zeptá se jaké číslo chceme škrtnout/instrukce

```

```

    if x=="p": #Když je vstup „p“, tak provede propočet toho, kdo má
vítěznou strategii
        f, g = propocet(pole) # Proveďte propočet a uložte informace o
vítězi a kde se zastavilo počítačové aktuálního simulovaného čísla v momentě
konce propočtu
        if f == 1: #Pokud vyhrává hráč na tuhu, tak vytiskne zprávu, že
aktuální hráč vyhrává a jaké nejnižší číslo vede k vítězství
            print("Řešením je škrtnutí čísla ", g+1, "!", sep="")
        else: #V opačném případě vytiskne smutnou zprávu, že situace
je pro hráče na tahu bezvýhodná
            print("Nemá řešení")
        elif x=="s": #V případě uživatelského příkazu „s“, vytiskne celý
slovník skupin
            print(slovník)
        elif int(x) in (pole): #je vstupem číslo a není ještě škrtnuto, tak je
škrtnuto a vytisknuto
            x = int(x)
            skrt(pole, x)
            print(pole)
        else: # Pokud číslo číslo mezi nevyškrtnutými, tak vypíše příslušnou
zprávu
            print("Už škrtnuto!")
    if (nula(pole)) == 1: #Pokud je vše škrtnuto, tak je vypsaná
příslušná zpráva
        print("Konec hry!")
        n=n+1

```

Z tohoto programu můžeme dostat spoustu zajímavých odpovědí, které bychom neměli předtím šanci spočítat. Je zde ještě otázka, zda by nám tato znalost poskytla dříve nějakou odpověď na téma. Pravděpodobně ne, jelikož tato znalost je sice užitečná, ale sama o sobě matematicky nic nedokazuje a ani nám o hře nic neříká.

Má ale tu výhodu, že lze velmi jednoduše upravit tak, že nám sám bude počítat automaticky počítat hru za hrou a navíc si při tom může pamatovat databázi předchozích her, pomocí takového programu jsme například schopni dosáhnout následujících výsledků:

Hra 5, 1, je rovnou vyhraná!
Řešením hry 5, 2 je škrtnutí čísla 3!
Řešením hry 5, 3 je škrtnutí čísla 2!
Řešením hry 5, 4 je škrtnutí čísla 11!
Řešením hry 5, 6 je škrtnutí čísla 19!
Řešením hry 5, 7 je škrtnutí čísla 8!
Řešením hry 5, 8 je škrtnutí čísla 7!
Řešením hry 5, 9 je škrtnutí čísla 31!
Řešením hry 5, 11 je škrtnutí čísla 4!
Řešením hry 5, 12 je škrtnutí čísla 33!
Řešením hry 5, 13 je škrtnutí čísla 37!
Řešením hry 5, 14 je škrtnutí čísla 18!
Řešením hry 5, 16 je škrtnutí čísla 18!
Řešením hry 5, 17 je škrtnutí čísla 18!
Řešením hry 5, 18 je škrtnutí čísla 14!
Řešením hry 5, 19 je škrtnutí čísla 6!
Řešením hry 5, 21 je škrtnutí čísla 69!
Řešením hry 5, 22 je škrtnutí čísla 23!
Řešením hry 5, 23 je škrtnutí čísla 22!
Řešením hry 5, 24 je škrtnutí čísla 71!
Řešením hry 5, 26 je škrtnutí čísla 23!
Řešením hry 5, 27 je škrtnutí čísla 29!
Řešením hry 5, 28 je škrtnutí čísla 29!
Řešením hry 5, 29 je škrtnutí čísla 27!
Řešením hry 5, 31 je škrtnutí čísla 9!
Řešením hry 5, 32 je škrtnutí čísla 103!
Řešením hry 5, 33 je škrtnutí čísla 12!
Řešením hry 5, 34 je škrtnutí čísla 101!
Řešením hry 5, 36 je škrtnutí čísla 109!
Řešením hry 5, 37 je škrtnutí čísla 13!
Řešením hry 5, 38 je škrtnutí čísla 39!
Řešením hry 5, 39 je škrtnutí čísla 38!
Řešením hry 5, 41 je škrtnutí čísla 39!
Řešením hry 5, 42 je škrtnutí čísla 41!
Řešením hry 5, 43 je škrtnutí čísla 42!
Řešením hry 5, 44 je škrtnutí čísla 46!
Řešením hry 5, 46 je škrtnutí čísla 43!
Řešením hry 5, 47 je škrtnutí čísla 51!

Řešením hry 5, 48 je škrtnutí čísla 49!
Řešením hry 5, 49 je škrtnutí čísla 48!
Řešením hry 5, 51 je škrtnutí čísla 47!
Řešením hry 5, 52 je škrtnutí čísla 53!
Řešením hry 5, 53 je škrtnutí čísla 44!
Řešením hry 5, 54 je škrtnutí čísla 52!
Řešením hry 5, 56 je škrtnutí čísla 54!
Řešením hry 5, 57 je škrtnutí čísla 58!
Řešením hry 5, 58 je škrtnutí čísla 56!
Řešením hry 5, 59 je škrtnutí čísla 62!
Řešením hry 5, 61 je škrtnutí čísla 57!
Řešením hry 5, 62 je škrtnutí čísla 56!
Řešením hry 5, 63 je škrtnutí čísla 66!
Řešením hry 5, 64 je škrtnutí čísla 66!
Řešením hry 5, 66 je škrtnutí čísla 63!
Řešením hry 5, 67 je škrtnutí čísla 218!
Řešením hry 5, 68 je škrtnutí čísla 64!
Řešením hry 5, 69 je škrtnutí čísla 21!
Řešením hry 5, 71 je škrtnutí čísla 24!
Řešením hry 5, 72 je škrtnutí čísla 73!
Řešením hry 5, 73 je škrtnutí čísla 72!
Řešením hry 5, 74 je škrtnutí čísla 76!
Řešením hry 5, 76 je škrtnutí čísla 74!
Řešením hry 5, 77 je škrtnutí čísla 74!
Řešením hry 5, 78 je škrtnutí čísla 77!
Řešením hry 5, 79 je škrtnutí čísla 81!
Řešením hry 5, 81 je škrtnutí čísla 73!
Řešením hry 5, 82 je škrtnutí čísla 268!
Řešením hry 5, 83 je škrtnutí čísla 79!
Řešením hry 5, 84 je škrtnutí čísla 86!
Řešením hry 5, 86 je škrtnutí čísla 83!
Řešením hry 5, 87 je škrtnutí čísla 88!
Řešením hry 5, 88 je škrtnutí čísla 87!
Řešením hry 5, 89 je škrtnutí čísla 87!
Řešením hry 5, 91 je škrtnutí čísla 89!
Řešením hry 5, 92 je škrtnutí čísla 93!
Řešením hry 5, 93 je škrtnutí čísla 92!
Řešením hry 5, 94 je škrtnutí čísla 92!

Řešením hry 5, 96 je škrtnutí čísla 94!
Řešením hry 5, 97 je škrtnutí čísla 98!
Řešením hry 5, 98 je škrtnutí čísla 84!
Řešením hry 5, 99 je škrtnutí čísla 97!
Řešením hry 5, 101 je škrtnutí čísla 34!
Řešením hry 5, 102 je škrtnutí čísla 328!
Řešením hry 5, 103 je škrtnutí čísla 32!
Řešením hry 5, 104 je škrtnutí čísla 107!
Řešením hry 5, 106 je škrtnutí čísla 108!
Řešením hry 5, 107 je škrtnutí čísla 96!
Řešením hry 5, 108 je škrtnutí čísla 106!
Řešením hry 5, 109 je škrtnutí čísla 36!
Řešením hry 5, 111 je škrtnutí čísla 112!
Řešením hry 5, 112 je škrtnutí čísla 111!
Řešením hry 5, 113 je škrtnutí čísla 357!
Řešením hry 5, 114 je škrtnutí čísla 116!
Řešením hry 5, 116 je škrtnutí čísla 114!
Řešením hry 5, 117 je škrtnutí čísla 116!
Řešením hry 5, 118 je škrtnutí čísla 116!
Řešením hry 5, 119 je škrtnutí čísla 121!
Řešením hry 5, 121 je škrtnutí čísla 119!
Řešením hry 5, 122 je škrtnutí čísla 119!
Řešením hry 5, 123 je škrtnutí čísla 114!
Řešením hry 5, 124 je škrtnutí čísla 117!
Řešením hry 5, 126 je škrtnutí čísla 128!
Řešením hry 5, 127 je škrtnutí čísla 128!
Řešením hry 5, 128 je škrtnutí čísla 126!
Řešením hry 5, 129 je škrtnutí čísla 127!
Řešením hry 5, 131 je škrtnutí čísla 127!
Řešením hry 5, 132 je škrtnutí čísla 133!
Řešením hry 5, 133 je škrtnutí čísla 131!
Řešením hry 5, 134 je škrtnutí čísla 137!
Řešením hry 5, 136 je škrtnutí čísla 444!
Řešením hry 5, 137 je škrtnutí čísla 134!
Řešením hry 5, 138 je škrtnutí čísla 134!
Řešením hry 5, 139 je škrtnutí čísla 141!
Řešením hry 5, 141 je škrtnutí čísla 139!
Řešením hry 5, 142 je škrtnutí čísla 478!

Řešením hry 5, 143 je škrtnutí čísla 472!
Řešením hry 5, 144 je škrtnutí čísla 153!
Řešením hry 5, 146 je škrtnutí čísla 153!
Řešením hry 5, 147 je škrtnutí čísla 141!
Řešením hry 5, 148 je škrtnutí čísla 141!
Řešením hry 5, 149 je škrtnutí čísla 147!
Řešením hry 5, 151 je škrtnutí čísla 162!
Řešením hry 5, 152 je škrtnutí čísla 154!
Řešením hry 5, 153 je škrtnutí čísla 144!
Řešením hry 5, 154 je škrtnutí čísla 152!
Řešením hry 5, 156 je škrtnutí čísla 154!
Řešením hry 5, 157 je škrtnutí čísla 164!
Řešením hry 5, 158 je škrtnutí čísla 139!
Řešením hry 5, 159 je škrtnutí čísla 161!
Řešením hry 5, 161 je škrtnutí čísla 158!
Řešením hry 5, 162 je škrtnutí čísla 151!
Řešením hry 5, 163 je škrtnutí čísla 154!
Řešením hry 5, 164 je škrtnutí čísla 157!

Pro názornost jsem přidal výsledky hry 5, x , pomocí programu⁸ ale můžeme počítat libovolné hry. (Například 4, x , zde jsem se dopočítat přes 200.)

Možná jsem to zapomněl zdůraznit, ale u 4, x na první pohled můžeme počítat pouze hry, kde je druhé číslo liché, ale když je sudé, tak první hráč škrtně 6 a vyhrál.

Zajímavé je, že výsledky programu se plně shodují se s mými, co jsem počítal ručně a pomocí Excelu, vystává zde tedy otázka: Že by to skutečně bylo bez chyby??? :D Neuvěřitelné!!! :D :D :D

Své povídání bych chtěl zakončit rekapitulací všeho ve formě prezentace. Ta je ke stažení na:

<https://ulozto.cz/xdAQbNbq/22-00-01-02-pptx>

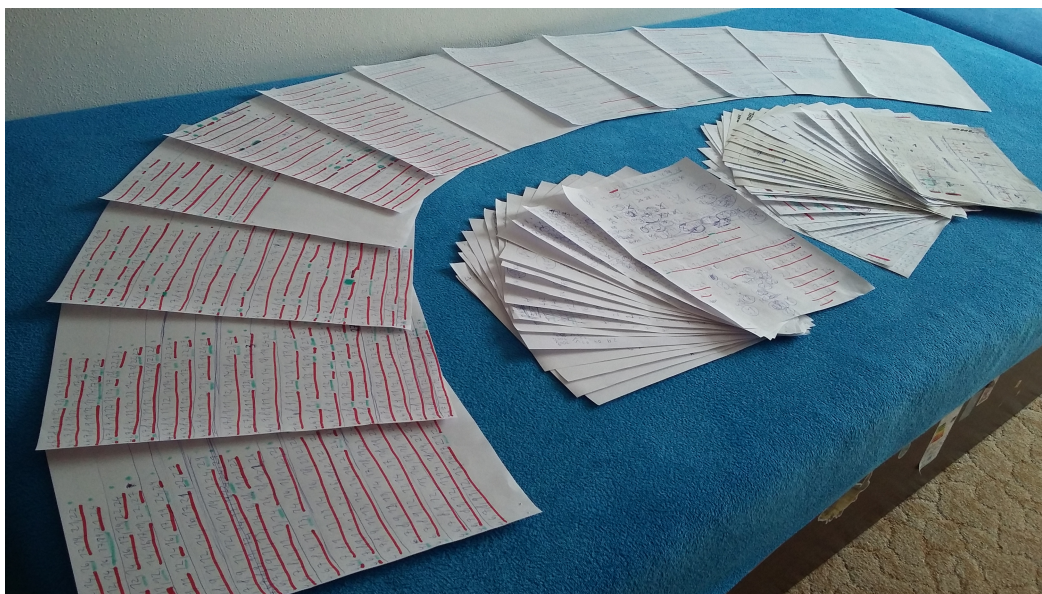
Na konec bych chtěl poděkovat Václavu Rozhoňovi, v první řadě za vymyšlení toho skvělého tématu. Dále za trpělivost a vytrvalost při čtení

⁸<https://ulozto.cz/xPkcRdi7/220012-py>

mých často nudných, zmatených, často špatných postupů a dělání chyb! :D.
A dále svým rodičům za to že mi poskytli nezbytné zázemí! Bez této pomoci
bych to nikdy nemohl dokončit!

Statistika

Od první ho posledního dne:	≈10 měsíců
Vyřešeno:	6. 3. 2016
Vy _T E _X áno stran:	51
Stran poznámek:	55
Vyprodukováno dat:	4,61+ GB
Souborů:	360



Díky!

Petr Šimůnek

2 M&M XXII. ročník 2. téma

2.1 M&M XXII. ročník; 2. téma; 1. příspěvek

Téma 2: Volební systémy

Již přes pětadvacet let funguje v naší zemi demokracie. Při volbách máme možnost vybrat zástupce z lidu, kteří budou zastupovat naše zájmy. Málokdo se však pozastavuje nad tím, jakým způsobem se hlasy sčítají. Zkuste pro začátek zodpovědět následující otázky:

Jak přesně se sčítají hlasy? Podle čeho se přidělují mandáty?

Jakým způsobem (a jestli vůbec) může způsob sčítání hlasů ovlivnit výsledky voleb?

Pokuste se zamyslet nad tím, jakému typu stran současný systém nahraává nebo které může znevýhodňovat. Jaká by byla vhodná definice „spravedlivosti“ systému?

Zkuste vymyslet nebo pozměnit volební systém tak, aby upřednostňoval nějakou skupinu voličů (bez přímého ovlivnění váhy hlasu).

Co kdyby šlo změnit počet mandátů podle volební účasti nebo až po sečtení hlasů?

Pokuste se srovnat způsob sčítání hlasů u nás a jinde v zahraničí. Jak by dopadly poslední volby do Poslanecké sněmovny, kdybychom používali jiný volební systém (například ten používaný ve Velké Británii)? Potřebná data najdete na <http://www.volby.cz/pls/ps2013/ps>.

Výsledky by měly být podloženy konkrétními daty a výpočty. Pokud použijete nějaký zdroj, nepameneňte uvést citaci. Otázky berte jako inspiraci, budeme rádi, když si budete schopni položit i vlastní a hledat na ně odpovědi.

Těšíme se na vaše příspěvky.

V mém příspěvku budu psát o demokracii 2.1. Občas zde budu sám něco doplňovat, hodně budu čerpat z: <http://slideslive.com/38892526/democracy-21-qualitative-enhancement-of-democracy>. Místy se jedná o přepis, některá místa jsou však pozměněná, některé části byly shrnuty, zatímco některé části byly přidány.

Jedním z problémů je korupce, bere přibližně 2% našeho hrubého domácího produktu (což je skutečně hodně). A dále všeobecně přes celé 20. století byl extrémismus a populismus velký problém a je do dnes. Je nějaký systém, který by mohl tyto nedostatky nějak alespoň zmírnit, jedno z řešení by mohla být demokracie 2.1.

Základní myšlenka je, že volič nemá 1 hlas, ale má jich několik a navíc má i záporný hlas(y). Začneme rovnou s několika příklady a postupem času si komentujeme některé z výsledků.

Nyní si představme první příklad. Máme zde 8 ultra vlastenců z různých zemí hlasujících o tom, do které restaurace zajdou na večeři. Každý má restauraci (svoji národní), do které může jít. Má to ale malý háček a to, že zde jsou 2 Američané. Co se tedy stane?

Hlasování (1.)								
osoba	1	2	3	4	5	6	7	8
národnost	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	USA
hlas	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	USA
Výsledky (1)								
národnost	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	
hlasy	1	1	1	1	1	1	2	

Tabulka 1: restaurace - 1. hlasování

Jak vidíme tak vyhrálo USA a oněch 8 super vlastenců půjde do levného fastfoodu místo do nějaké pěkné restaurace a byla to naprosto svobodná volba, co s tím můžeme dělat? Zkusme nyní ale dát všem 2 hlasy.

Po přidání 2. hlasu:

Hlasování (2.)								
osoba	1	2	3	4	5	6	7	8
národnost	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	USA
hlasy	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	USA
	Sp	It	It	Cz	Fr	Ru	Fr	It
Výsledky (2)								
národnost	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	
hlasy	1	3	2	2	4	2	2	

Tabulka 2: restaurace - 2. hlasování

A jak vidíme, tak jsme se s tímto „bezprávím“ vypořádali poměrně pěkně, vyhrála It. Nyní si můžeme být v celku jistí, že jsme vybrali jednu z nejlepších možností (třeba ne nejlepší, ale třeba 1 ze 3 nejlepších). Pojd'me ale ještě přidat každému záporný hlas:

Hlasování (3.)								
osoba	1	2	3	4	5	6	7	8
národnost	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	USA
hlasy	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	USA
	Sp	It	It	Cz	Fr	Ru	Fr	It
-hlas	It	Ru	USA	It	USA	It	Ru	Ru
Výsledky (3)								
národnost	Uk	Fr	Sp	Ru	It	Cz	USA	
hlasy	1	3	2	-1	1	2	0	

Tabulka 3: restaurace - 3. hlasování

Nyní se už můžeme dobře rozhodnout kam jít, jak vidíme, It minule vyhrála, ale jelikož jí hodně lidí nemělo rádo, tak nakonec zvítězila Fr. Pravděpodobně jsme se vyhnuli tomu, že se někam jde, ale většina je s výsledkem nespokojená. Pokud se na to podíváme racionálně, tak s každým dalším vylepšením jsme zajistili spokojenost více lidí.

Tím bychom ukončili 1. příklad, ale nyní mějme otázku. Máme 2 strany, každá z nich dostala řekněme 12%. Mají obě strany stejné právo na 12% zastoupení? Většina lidí by řekla, že je spravedlivé, aby obě strany měly stejný počet mandátů. To ale nemusí být nutně pravda. Řekněme, že 1. strana je fašistická strana a sice jí 12% podporuje, ale zároveň 80% je proti ní. Zatímco druhá strana, jejímž cílem je ochrana všech žlutých kytíček, má rovněž 12%, ale nikdo není proti ní. Když 2 fotbalové týmy vybírají hráče, kteří se střetnou, tak 2. tým nemá co povídat do složení druhého, ale my zde vybíráme reprezentaci, která bude reprezentovat nás všechny. Proto je zde tak důležitý onen záporný hlas. Viděli jsme už v minulém případě, že It restaurace nejprve vyhrála, ale zároveň 3 lidé byly výslovně proti ní. Vidíme tedy, že mínusový hlas je důležitý prvek demokracie 2.1. Zůstává zde však ale ještě nemalá otázka kolik hlasů by mělo být jakých, ale už teď jsme dosáhli nemalého zlepšení.

Pojďme na druhý příklad. Máme 4 kandidáty 2 křesla, každý volič má 2 hlasy (zatím bez mínusového). Budeme mít 2 pravicové a 2 levicové, z každé strany bude 1 zkorumpovaný a druhý ne, označme si je P^+ ; P^- ; L^+ a L^- . A řekněme, že voliči budou upřednostňovat nejdříve politickou orientaci a poté zkorumpovanost (což je vzhledem k některým výzkumům málo pravděpodobné, ale pro názornost). A dokážou se koordinovat (ve skutečnosti takřka nemožné). (Ve skutečnosti by asi voliči ztratili o kandidáta ztratili zájem, pokud by věděli, že je zkorumpovaný, ale pro příklad předpokládejme, že jsou nemorální, i tak se zde projeví takový „čistící“ efekt)

A řekněme, že pravicoví voliči jsou ve většině ($n_P > n_L$)

Pokud bude mít každý 2 hlasy tak:

osoba	P^+	P^-	L^+	L^-
počet hlasů	n_p	n_p	n_l	n_l

Tabulka 4: P^+ ; P^- ; L^+ a L^- - 1. hlasování

Jak vidíme tak postoupili P^+ a P^- , to asi nechceme zkorumpovaného člověka, navíc by celá reprezentace pouze pravicová, zatímco počet voličů mohl být rozdílný třeba o 1%. Což není moc spravedlivé a ani tento výsledek nechceme. Pojďme nyní počítat s 1 hlasem záporným.

osoba	P^+	P^-	L^+	L^-
počet hlasů	n_P	$n_P - n_L$	$n_L - \frac{n_P}{2}$	$n_L - \frac{n_P}{2}$

Tabulka 5: P^+ ; P^- ; L^+ a L^- - 2. hlasování

Pravice rozdělila své hlasy (musela, v jejich případě je nejsilnější rival ten s nejmenším počtem záporných hlasů, zatímco levice může dát vše na 1-ho kandidáta). Podmínka pro to, aby někdo z levice dostal křeslo je $n_P - n_L \leq n_L - \frac{n_P}{2} \rightarrow 3n_P \leq 4n_L$ Levicových tedy musí být alespoň 43%. V realitě by ale zkorumpovaný dostal více záporných hlasů a stačilo by i méně hlasů, jak vidíme došlo zde ke zmírnění politického spektra, zatím normálně bychom při 57% měli pěknou pravicovou diktaturu, tak nyní máme stále demokracii (v tomto modelu je demokracie mnohem silnější a je výrazně těžší jí svrhnout). Ještě bych poznamenal, že 43% je hraniční podmínka (pesimistický odhad), skutečnost by byla lepší.

Ukázal se nám takový „čistící“ efekt, kdy jsme vlastně dostali vyrovnanou reprezentaci i když levice byla v nevýhodě. A zde vidíme typickou ukázkou, že v tomto systému nedochází ke znevýhodňování menšin, zatímco v dnešní společnosti to často bývá problém (neustále řešíme menšiny, řešíme jejich diskriminaci, ale neustále je diskriminujeme).

Co by udělala demokracie 2.1 s politickými stranami? Došlo by k snížení vlivu pravicových a levicových stran (extremistických) a zesílily by středové strany, zároveň by ale nedošlo ke snížení počtu stran, jelikož voliči by se nebáli dávat hlasy slabším stranám, jelikož za současné situace zahazují svůj hlas, zatímco v novém systému už hlasovali pro silnou stranu a druhý hlas mohou použít pro tu stranu, s kterou se ztotožňují a jejich hlas začíná mít váhu (zároveň nic neztrácí) a přináší nám to takový herní aspekt, kdy se z voleb stává strategická hra každého (a lidé mají rádi hry), jelikož každý má větší moc a díky tomu, že se lidé nebudou bát dávat hlasy slabším stranám, tak se nám objevuje šance pro menší strany na rychlý růst.

Na druhou stranu zároveň strany mohou rychle ztratit, jelikož v případě korupce nejen, že ztratí část svých voličů, ale zároveň se objeví síla nevole. Stejný efekt bude mít demokracie 2.1 i na populisty, například i v 30. letech bylo hodně Němců proti nacizmu, což i dokazuje velká imigrační vlna. Když nacismus tak nenáviděli, že se odstěhovali z domovů, tak by jistě většina z

nich během voleb nacistům onen záporný hlas dalo, což by jistě mělo nemalý dopad. Navíc menšina (židé) by se tehdy i mohla efektivněji bránit.

Jak vidíme, tak politika by byla mnohem progresivnější a strany by si musely dávat velký pozor na to, co dělají a v momentě, kdy by lidé měli větší vliv na politiku, tak by zároveň i stoupl zájem o ní, tudíž zde máme takový kruh navzájem se posilujících věcí.

Modelů demokracie 2.1 je několik, ale nejčastěji máme 2 nebo 4 kladné hlasy a většinou 1 záporný. Dále také ještě musí být počet kladných hlasů $2\times$ větší než počet záporných hlasů.

Nakonec problém na závěr, vezmeme si výsledky voleb v Německu z roku 1932 a pokusíme se je analyzovat. Podívejme se podívat na výsledky a pojďme zjistit jestli na základě jistých predikcí, založených na faktech, by se změnil chod dějin, kdyby by se tedy volilo podle našeho volebního modelu.

Party	Votes	%	Seats	+/-
National Socialist German Workers Party	13 745 680	37.27	230	+123
Social Democratic Party of Germany	7 959 712	21.58	133	-10
Communist Party of Germany	5 282 636	14.32	89	+12
Centre Party	4 589 430	12.44	75	+7
German National People's Party	2 178 024	5.91	37	-4
Bavarian People's Party	1 192 684	3.23	22	+3

Tabulka 6: Volby - Německo 1932

Dovolil jsem si tabulku nepřekládat, myslím že není potřeba.

Party	Votes	%	Orientation
National Socialist German Workers Party	13 745 680	37.27	R+
Social Democratic Party of Germany	7 959 712	21.58	L-
Communist Party of Germany	5 282 636	14.32	L+
Centre Party	4 589 430	12.44	M
German National People's Party	2 178 024	5.91	R-
Bavarian People's Party	1 192 684	3.23	M

Tabulka 7: Volby - Německo 1932 - orientace

R – pravice (right); L – levice (left); M – střed (middle); + – ultra;
- – konzervativní.

Na začátek bych ještě chtěl podotknout, že existuje několik možných kombinací pravidel. A bezpočet možností jak by mohly volby dopadnout. Dále bychom také potřebovaly znát přesné pozadí všeho ve všech volebních okresech, následující text je velmi zjednodušený.

A nyní dejme pravidlo, že volíme strany, máme 2 hlasy a 1 záporný. A pokud chceme dát záporný, tak musíme dát 2 kladné. Pojd'me si projít jednotlivé strany a říci si koho by mohli jejich voliči volit.⁹

Jak uvidíte tak součet rozdaných hlasů se pohybuje kolem 1,7 a počet záporných hlasů kolem -0,5, jelikož každý nebude využívat všech možností (to je i dokázáno výzkumy).¹⁰

I když se to moc nezdá, tak v té době měla v určitých ohledech pravice a levice k sobě blízko, obě křídla vycházela z ekonomické krize roku 1929 a slibovala práci pro každého, tudíž v dnešní společnosti by bylo vynulování sil levice a pravice stejné, zde k sobě tyto opačné strany cílí na stejné lidi, tudíž normální volič by klidně mohl volit ultra pravici i ultra levici zároveň (z dnešního pohledu nesmysl).

⁹V našem modelu budeme mít 2 hlasy kladné a 1 záporný, pokud bychom volili mandáty, tak bychom jich mohli mít i více (hlasů), někdo může namítat, že by všichni dali všechny hlasy straně, pro kterou hlasovali, ale je dokázáno, že to tak nedopadá. A je výrazně častější rozdělování hlasů.

¹⁰Ale i přes to to není nefér pro ty, co žádné další hlasy nedávají, jelikož dají hlas straně, kterou podporují, vyjádřili se, a už nemají potřebu se dále vyjadřovat.

Tu máme trochu dějepisů:

NSDAP: pravděpodobně by nejvíce druhých hlasů dostala 5. strana (R-), jelikož je nejbližší (30%), poté by po 10% dostala 2. 3. a 4. strany, jelikož i mezi nacisty jistě byl někdo kdo podporoval střed, umírněnou levici a nebo extremismus obecně (10%), dále co se týče záporných hlasů, tak bych dal 2. a 4. -10% záporných a komunistům -20%, jelikož komunisté byli podle Hitlera hlavními nepřáteli, tak jim dáme -20%. Končíme tedy s koeficienty pro strany: 1; 0; -0,1; 0; 0,3; 0.

U sociální demokracie (L-) si myslím, že hodně voličů podporovalo komunisty, jelikož měli k nim měli v politickém spektru blízko (0,3%). Dále si myslím, že hodně by ještě mohl mít podporu střed 0,3% a 0,1% (druhá středová strana byla menší, tudíž by většinu asi vzala větší strana). Zároveň si ale myslím, že část těchto voličů byla poměrně umírněná, takže zde bude -10% pro komunisty a -30% pro nacisty. Naše koeficienty pro strany jsou: -0,3; 1; 0,2; 0,3; 0; 0,1.

A nyní komunisté (L-), pro ně obecně platí, že komunisté většinou jiné strany nevolí, proto si myslím, že jediné budou volit 30% sociální demokracii (L-) a 10% nacisty (jak jsem výše psal, v něčem k sobě měli blízko). Nacisté dostanou -20%, jelikož měli hodně sporů (lídrové se nenáviděli). Koeficienty: -0,1; 0,3; 1; 0; 0; 0.

Dále tu máme 4. stranu „Centrum“, která je asi obdoba KDU-ČSL, a byla středová (M). Tam odhaduji rozdělení voličů pro 2.(40%) 5.(20%) a 6.(30%) stranu, jelikož jsou středové nebo umírněné více dostane sociální demokracie, protože je prostě silnější. Naopak 6. strana je politicky nejbližší. Dále určitě většina půjde silně proti extremismu takže -30% pro komunisty. Koeficienty: -0,3; 0,4; -0,3; 1; 0,2; 0,3

Poslední 2 strany měly málo hlasů, tak je vezmeme rychle. Jako předposlední tu máme stranu (R-). Ty se budou dělit mezi nacisty a střed, ale půjdou proti levici. Koeficienty: 0,3; -0,1; -0,4; 0,3; 1; 0,1.

Poslední strana je středová, takže bude podporovat střed a umírněné, bude proti extremismu. Koeficienty stran: -0,3; 0,1; -0,3; 0,6; 0,1; 1.

Dopočítání je už triviální, jinak našich 6 stran pokrývá asi 95%, tudíž oněch 5% zanedbáme a budeme počítat s oněmi 95% jako se 100%.

n	Σ_1	$\%_1$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	Σ_2	$\%_2$	or.
1	13 745 680	39,6%	1	-0,3	-0,1	-0,3	0,3	-0,3	9 829 276	22,9%	R+
2	7 689 712	22,2%	0	1	0,3	0,4	-0,1	0,1	11 011 741	25,7%	L-
3	5 282 636	15,2%	-0,1	0,2	1	-0,3	-0,4	-0,3	2 840 167	6,6%	L+
4	4 589 430	13,2%	0	0,3	0	1	0,3	0,6	8 265 361	19,3%	M
5	2 178 024	6,3%	0,3	0	0	0,2	1	0,1	7 338 882	17,1%	R-
6	1 192 684	3,4%	0	0,1	0	0,3	0,1	1	3 556 287	8,3%	M

Tabulka 8: Volby - Německo 1932 - demokracie 2.1

Výsledek je velké překvapení, nejen že NSDAP nevyhrálo na plné čáře, ale dokonce je až 2. Dokonce přišli přibližně o 16% hlasů, což je znatelné, dále ještě ztratili další extrémisté a to komunisté necelých 9%. Dohromady přišli extrémisté o 25% hlasů, což je znatelná ztráta.

Naopak posílili umírněné a středové strany, vítězem se stala sociální demokracie s 25,7% hlasů. Strana Střed si výrazně polepšila a není až zas tak daleko za NSDAP. Poslední 2 strany rovněž výrazně posílily. Hlavně z toho důvodu, že často byly blízko některým silným stranám, ale zároveň je nikdo neměl důvod nenávidět. (Populismus se ukázal jako velké mínus – přesně proti tomu demokracie 2.1 bojuje)

Jak vidíme, tak NSDAP by nebyla schopná sestavit vládu, vzhledem k tomu, že sociální demokracie byla nyní nejsilnější stranou, tak by to byla ona, kdo by se pokoušela sestavit vládu, pravděpodobně by utvářela koalici se středovými stranami (53,3%), otázka je jak by to bylo s počtem křesel, jelikož ten není přímo úměrný počtu hlasů, ale přiděluje se podle dalších metod. S umírněnou pravicí by se však už pravděpodobně měli převahu určitě.

Komunisté by jistě zůstali stranou, jelikož ti v té době vždy byli mimo koalici už z principu. Je otázka jestli by se NSDAP nepokusila vytvořit vládu, ale to je nepravděpodobně, jelikož by moc stran s ní do koalice nechtělo.

Tehdy měly strany problém zformovat vládu, což je pochopitelné, jelikož komunisté s nikým do koalice nešli a s nacisty a jejich extrémními názory se

většina ostatních stran neztotožňovala. Navíc Hitler ani o koalici moc nestál.

Nakonec to pokračovalo tak, že starý prezident Hindenburg udělal z Hitlera kancléře, jelikož NSDAP měla velkou podporu, ten toho zneužil díky požáru Reichstagu, to byl začátek konce, konec demokracie v Německu a začátek třetí říše.

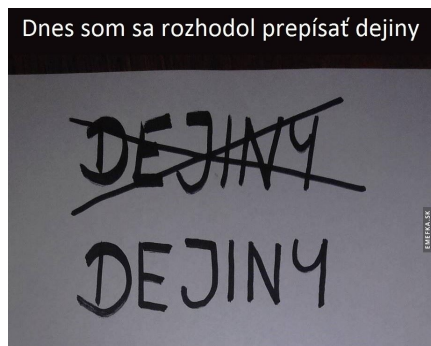
Bez výrazné převahy se Hitler nestává kancléřem a naopak se stává lídrem opozice. Je však velmi možné, že by se 4 ostatní strany spojily, jelikož k sobě tak daleko neměly (asi ale spíše ze strachu, jelikož by nacisté stále byli silní). Jejich spojení by však mělo velkou podporu (70,4%). A naprosto by vládli říšskému sněmu. Demokracie by tak zásadně v Německu posílila a Hitler by tak stál proti trojnásobné převaze a navíc bez jakýchkoliv větších pravomocí. Pro nacisty jsou tak volby velký neúspěch a pravděpodobně rychle ztrácejí přízeň a mizí stejně rychle jako se objevili a nadále se omezují na menší stranu, podobně jako komunisté.

Jinak si všimněme, že komunisté měli opravdu málo hlasů, což není až zas tak nereálné, jelikož když se koncept demokracie 2.1 testoval v ČR, tak komunisté měli dokonce záporný počet hlasů.

Samozřejmě nic z toho není 100% předpověď, toto je jen jeden z možných scénářů, založený je však na faktech. Vždy je ale zábava teoretizovat co se mohlo stát.

Žádný ze závěrů nebo příkladů nebyl nijak politicky motivován.

A co by to bylo za článek bez zlehčujícího doplňujícího obrázku:



3 M&M XXII. ročník 3. téma

3.1 M&M XXII. ročník; 3. téma; 1. příspěvek

Téma 3: Kosmický kulečník

Představte si, že se jednoho dne nebo noci podíváte na oblohu a zjistíte, že nějaké těleso sluneční soustavy zmizelo. Sluneční soustava tak, jak ji známe, šlape jako hodinky, a proto bude mít toto zmizení u některých těles větší a u některých menší vliv na Zemi, Slunce a ostatní tělesa.

Vyberte si těleso sluneční soustavy mimo Zemi a Slunce a popište, co by se stalo, kdyby náhle zmizelo. Jakým způsobem se tělesa nejvíce ovlivňují a co se kvůli tomu může změnit? Změní se oběžné dráhy či jiné pohyby těles? Může po takovéto změně nastat dlouhodobější rovnováha, nebo se budou poměry ve sluneční soustavě drasticky měnit? Bylo by možné bez tohoto tělesa nadále žít na Zemi? Všimli by si zmizení pouze astronomové, nebo by mělo nezanedbatelný dopad? Zkuste se zamyslet nad následky, které bychom pocítili na Zemi, i nad dopady na jiné planety nebo Slunce.

Ve svém krátkém příspěvku, jsem se rozhodl, že shrnu některé zajímavé faktory. Nakonec se podíváme na měsíce Jupitera (využívám zmínky z 3. čísla). Nebudeme se zatím specializovat na žádné těleso.

Chtěl bych začít, s důsledky, které zmizení planety vyvolá nepřímo. Toto zmizení by mohlo mít za následek destabilizování oběžných drah meteoritů a jím podobné havěti. Toto by by pro nás mohlo mít možná největší následky. Například přibližně o $\frac{1}{3}$ oběžné dráhy posunutí Jupitera obíhají Slunce Trojané¹¹. Zmizení Jupitera by velmi jistě mělo za následek destabilizaci planetek a po nějakém času náhodné rozletění (až vystřelení) na všechny různé strany. Asteroidy jsou nevypočitatelná tělesa, někdy nemusí být ani počáteční impuls velký, například počátečního impulsu, k vyhynutí dinosaurů byl skoro 100 miliónů let¹² před samotným vyhynutím.

Dále něco o kometách. Komety mají ještě oproti meteoritům další nebezpečnou vlastnost a to, že jsou tvořeny z ledu, díky tomu mohou tvořit ohon, ale během toho, co se zahřívají mohou (a také to dělají) uvolňovat svůj materiál zcela náhodně a tím náhodně řídit svou dráhu. Tím se stávají pro nás ještě nebezpečnější, jelikož nedokážeme efektivně předpovídat jejich dráhu.

Dále ještě, když jsme u těch komet, tak určitě stojí za to zmínit kometu Shoemaker Levy 9¹³, která má rovněž spojitost se zmizením Jupitera. Tato kometa narazila do Jupitera v roce 1994. A určitě to nebylo poprvé ani naposledy, co něco narazilo do Jupitera (nebo do jiné planety). Možná kdysi nějaká planeta zachránila nebo zachrání Zemi, kdo ví? (Nebo se na to můžeme dívat z druhé strany a říci, že právě nezachránila :-D (viz. dinosauri)).

Nakonec, když ještě mluvíme o smetí, můžeme též zmínit prstence, jako má Saturn, ty by také dokázali nadělat hodně srandy :-D .

Dále o měsících Jupitera, po jeho zmizení. Bude záležet, kde se zrovna budou měsíce nacházet, nejzásadnější věci se asi stanou pokud se budou zrovna pohybovat přímo před ním nebo za ním (pokud se rychlosti měsíců a Jupitera

¹¹<https://cs.wikipedia.org/wiki/Trojn>

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Chicxulub_crater

¹³https://cs.wikipedia.org/wiki/Shoemaker-Levy_9

budou sčítat nebo odčítat.

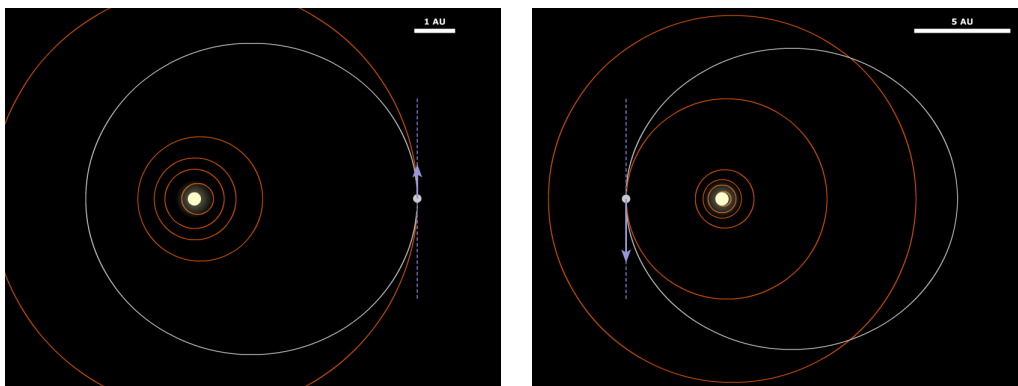
Pokud chceme provést nějaké výpočty, můžeme provést zanedbání toho, že zde nějaký Jupiter byl a vezmeme pouze měsíc jako hmotný bod, dodáme mu vybraný vektor a aplikujeme Keplerovi zákony. Ale nejdřív pár údajů:

Jupiter	$13,050 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Io	$2,758 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Europa	$1,188 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Ganymed	$1,173 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Calisto	$1,306 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Velká poloosa Jupitera je 778 412 027 km.

Tudíž vidíme, že nejzajímavější pro nás bude Io. Tudíž výchozí vzdálenost od Slunce je pro nás vždy 778 412 027 km. Největší rychlost bude 15,808. Nejmenší bude 10,292. Což je docela rozdíl.

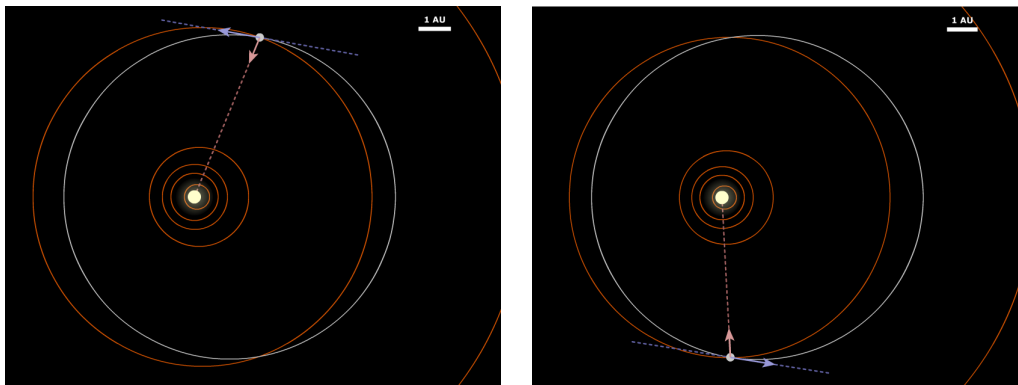
Nejprve jsem zavítal na stránku <http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.swf>, kde jsem se pokusil obojí nasimulovat, pro zpomalení a pro zrychlení to vyšlo takto:



Když Io zpomalí, tak nás neohrozí ale, v druhém případě jak vidíme, že protíná dráhu Saturnu, pro jistotu si ale spočítáme, jaká je úniková rychlost Io a to pomocí vzorečku: $v_u = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}$, kde M je hmotnost Slunce a r je vzdálenost od Slunce, κ je gravitační konstanta. Po dosazení nám vyjde

hodnota $18,468 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Což je více, než $15,808$, tudíž Io neuletí! :-D

A nyní: proč řešíme především především případy, kdy se rychlosti skládají, zdravý rozum by mohl říkat, že nejvíce měsíce uletí, pokud bude tečna jejich pohybu kolmá na tečnu pohybu planety. Poté se však jejich celková rychlost bude počítat přes Pythagorovu větu a nebude se sčítat, jako v předešlém případě, takto bychom mohli dosáhnout největší rychlosti $13,338$ a nejmenší $12,755$, což jak vidíme není ani z daleka úniková rychlost. A změna je menší. Klíčová je rychlost (rychlost je energie). Opět máme vizualizaci:



Tudíž jak vidíme, tak výsledky jsou docela zajímavé. Mohlo by být zajímavé počítat s dalšími objekty obíhající něco jiného, horkými adepty na uletění by mohl být Titan, Enceladus, Tritón a Charon (měsíc Saturnu, Saturnu, Uranu, Pluta). Zajímavý by mohl být i náš měsíc. Nakonec by mohl být i zajímavý rozpad prstenců Saturnu. Jinak co se týče našeho měsíce, tak u něj nesmíme opomínat náhlé zmizení slapových jevů.

K obrázkům: obrázky byly pořízeny jako screenshoty na stránce <http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.swf>, dráhy jsou nastaveny tak, aby se v místech, kde se protínají s dráhou Jupitera měly správný úhel s oběžných drah (tečen) a správnou rychlost, to nám samo o sobě k přesnému nadefinování dráhy stačí. Tudíž dráhy, které tu vidíme by měly být velmi podobné těm skutečným.

3.2 M&M XXII. ročník; 3. téma; 2. příspěvek

-

Ve svém druhém příspěvku spočítám dráhu Io a podívám se ještě náš měsíc.

Na začátek se musím přiznat, že jsem kdesi minule udělal chybu, skutečná rychlost Io je dostatečná na to, aby byla úniková, jelikož jsem na to přišel až po sepsání příspěvku a s původními hodnotami se pěkně počítalo, tak řekněme, že si nejprve ukázkově spočítáme dráhu pro těleso, které má stejné vlastnosti jako špatně spočítané Io (popravdě pevně věřím, že existuje nějaké zrníčko prachu, které takto Jupiter obíhá! :D (Nebo nějaký paralelní vesmír :D))

Začneme s přehledem parametrů, co budeme potřebovat k výpočtu (počítáme moment, kdy se rychlosti složí):

$$\begin{aligned} G &= 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \\ M &= 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ m &= 8,932 \cdot 10^{22} \text{ kg} \\ r &= 7,784 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ v &= 1,581 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \alpha &= 90^\circ \end{aligned}$$

Nejprve musíme spočítat E :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \approx -4,069 \cdot 10^{-30} \text{ J} \quad (1)$$

$$L = mrv \sin \alpha \approx 1,099 \cdot 10^{39} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2)$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2L^2}{G^2 \cdot M^2 \cdot m^3} E + 1} \approx 0,466 \quad (3)$$

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} \approx 1,672 \cdot 10^{12} \text{ m} \quad (4)$$

Nyní známe všechny parametry dráhy. Na adrese <http://ulozto.cz/xXHHD75Y/22-00-03-10-xlsx> je ke stáhnutí tabulka v Excelu, kde lze dosadit vstupní hodnoty a dostaneme odpověď pro libovolné těleso (dole tam se tam vykresluje dráhy, ale POZOR osy nejsou přesně v měřítku, je potřeba vždy vždy graf roztáhnout tak, aby měl správně roztážené osy, (o všech funkcích a jak

na to na konci příspěvku)).

Maximální "odlet" tělesa bychom spočítali přes derivace. Označme v_1 rychlost Jupitera a v_2 rychlost našeho zrníčka prachu. Z pythagorovy věty vyjádříme výsledný vektor jako rychlosti jako (úhel β bereme od kladné osy x ve směru pohybu):

$$v = \sqrt{(v_1 + \cos \beta v_2)^2 + (\sin \beta v_1)^2}; \sin \alpha = \frac{\sin \beta v_1}{v}; \cos \alpha = \frac{v_1 + \cos \beta v_2}{v}$$

Jedná se o Pythagorovu větu a rozkládání na vektory a vztahy v pravoúhlém trojúhelníku.

Nyní bychom už byly schopni vyjádřit E i L . Dosadíme tedy do rovnice pro ϵ :

$$E = \frac{1}{2}m(\sqrt{(v_1 + \cos \beta v_2)^2 + (\sin \beta v_1)^2})^2 - G\frac{Mm}{r} \quad (5)$$

$$L = mr v \frac{\sin \beta v_1}{v} = mr \sin \beta v_1 \quad (6)$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2L^2}{G^2 \cdot M^2 \cdot m^3} E + 1} \quad (7)$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2(mr \sin \beta v_1)^2}{G^2 \cdot M^2 \cdot m^3} \left(\frac{1}{2}m(\sqrt{(v_1 + \cos \beta v_2)^2 + (\sin \beta v_1)^2})^2 - G\frac{Mm}{r} \right) + 1} \quad (8)$$

A nyní funkci excentricity podle β .

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2(mr \sin \beta v_1)^2}{G^2 \cdot M^2 \cdot m^3} \left(\frac{1}{2}m(\sqrt{(v_1 + \cos \beta v_2)^2 + (\sin \beta v_1)^2})^2 - G\frac{Mm}{r} \right) + 1} \quad (9)$$

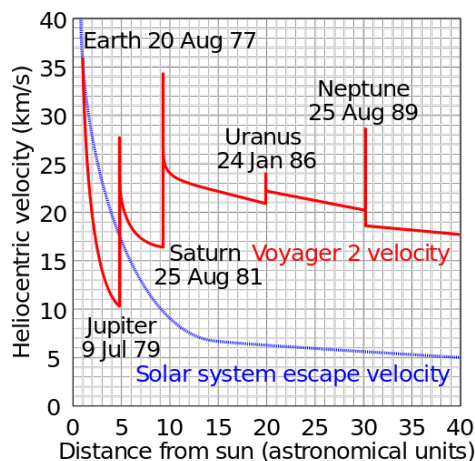
A úplně netuším jak to přesně zderivovat a tak asi bude lepší to tady ukončit.

Dále jsem si řekl, že ještě spočítám stejným způsobem Měsíc (po zmižení Země (teď trochu kašlu na to, co je napsáno v zadání („mimo Zemi a Slunce“)) a výsledky jsou $\epsilon = 0,070$; $p = 1,070$ AU – V perihelu bude vzdáleno od Slunce 1 AU a v apheliu to bude 1,150 AU. Což nebude na nic stačit ani náhodou.

Ale vzhledem k rychlosti Io, ($17\,334\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) oproti Jupiteru ($13\,050\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) se dokonce Io může otočit nebo jeho rychlost může být úniková. Může si tedy takřka létat jak chce.

Může křížit dráhy všech planet a může prolétat pásem asteroidů. To by mělo jistě za následek narušení pásu.

To, že nevyletí ani nepadne do Slunce (a ani se s ničím nesrazí) nemusí být definitivní. Je ještě možný efekt takzvaného gravitačního praku, též nazývaného gravitační manévru¹⁴. To že to opravdu funguje můžeme vidět na obrázku 2. To jak to funguje tady rozebírat nebudu (je to prosté a navíc na internetu), ale tento efekt by mohl mít ještě větší důsledky, například bychom mohli využít nějakou z planet jako gravitační prak, Io k Saturnu a nebo rovnou ze sluneční soustavy. Dokonce by se dal i s trochou šikovnosti naopak nasměrovat, aby naopak spadl do Slunce (vystřelit ho před Saturn tak, aby mu zůstala po průletu pouze složka rychlosti směřující od Slunce, kterou by postupně ztratil a spadl)¹⁵. Takže trocha srandy by se s tím dala užít :D¹⁶



Obrázek 2: Rychlost sondy Voyager 2

¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_assist

¹⁵S využitím gravitačního praku by se také daly jistě zařídit i srážky nějakých těles.

¹⁶Asi docela dobře by se s tím dalo pohrát ve hře Universe Sandbox

Trailer: <https://youtu.be/dhY6G3iNiQ4> (Dokonce jde stáhnout i testovací verze.)

Dále zde je ještě jeden aspekt spojený s měsícem a to, že díky tomu, že 2 tělesa, která kolem sebe nějak obíhají často ráda končí ve vázané rotaci ($\rightarrow$ postupem času se rotace zpomaluje). To mě přivedlo k tomuto videu: Evolution of life without a Moon (<https://youtu.be/p-YZAIECTrA>). Krátce: kdyby Země nezažila jako protoplaneta onu slavnou srážku, kdy vznikl měsíc, tak je možné že by se život nikdy nevyvinul do forem jako dnes (nebo vůbec). Mělo by to za následek spoustu změn, například klima by bylo jiné a výrazně nestabilnější, život by se nemohl vzhledem k silným větrům (způsobných rychlou rotací planety) dorozumívat zvukem, ale nějak jinak. Z toho lze do budoucna odvodit, že pokud by zmizel měsíc, tak by se to v budoucnu projeвило na délce dnu (ve skutečnosti bude delší než kdyby zmizel). Také bychom přišli o zatmění Slunce, spoustu konspiračních teorií ohledně letu Američanů na měsíc, spoustu úžasných plánů na jeho budoucí kolonizaci a v neposlední řadě, když jsme u těch her, tak by přistání na cizím tělese ve hře Kerbal Space Program¹⁷ bylo o něco těžší :-D.

Tady jsem to chtěl původně utnout, ale ještě mě napadlo, že bych mohl pomocí Excelu přibližně spočítat nejlepší úhel pro odlet měsíce. (Původně Io, ale to je takové složité vzhledem k tomu, že odlétne pokaždé). (Tady jsem přišel na to že skutečná rychlost Io je výrazně vyšší :D). Zpracoval jsem, ale na tabulce a nyní dělá několik základních simulací. Pojd'me se na to tedy podívat.

Na prvním listu jsou nejprve naše 2 tělesa, rychlosti zde jsou už sečtené a 3. těleso si můžeme libovolně navolit, navíc zde jsou grafy oněch drah (tvořené 360 body). Jsou tu trochu problémy s hyperbolickými a parabolickými dráhami. Je zde 5 bodů navíc, 1 uprostřed nahrazuje Slunce a 4 zde jsou po stranách, protože Excel má takovou "super" funkci, že si mění měřítko os (prostě to dokáže celé zdeformovat naprosto neuvěřitelným způsobem) takto je pouze potřeba, aby tyto 4 body pouze tvořili takový čtverec stojící na jednom z rohů. Na dalším listu pak máme Io a Měsíc samostatně, hlavní věc zde je, že si můžeme hrát s jednotlivými úhly (můžeme samozřejmě editovat všechny údaje (dokonce i gravitační konstantu, takže můžeme tvořit i nějaké fiktivní systémy (např. Kerbal Space Program))). Poté se nám vykreslí dráha původní a nově vzniklá (pozn. ohniska jsou vždy umístěna na x -ovou osu, pokud není zadáný úhel měsíce 0° nebo 180° , tak dochází k posunu ohni-

¹⁷Trailer: <https://youtu.be/RkD00sGg-9I>

sek z původní osy, původní dráhy se však vždy (pokud měsíc neodletěl) kříží v místě odpoutání).

Jinak proč odpoutáváme těleso v periheliu, jelikož zde je to nejvýhodnější, jelikož pokud bychom zvýšili rychlost v apheliu, tak bychom se dostali dál od Slunce, tam kde bylo dříve perihelium. Toto používají rakety, když chtějí dosáhnout orbity podobné kružnici, tak provádí zážeh na vrcholu dráhy. My však nechceme kruhové dráhy, ale nějaké extrémy, právě proto odpoutáváme měsíce v periheliu planety.

Jinak z planety můžeme střílet měsíce libovolnými směry v okruhu 360° . Můžou zde ale opět nastat problémy s převrácením os. Proto jsem obrátil osu x u příkladu s Io, jelikož takto je vlastně $2\times$ obrácená, bez obrácení by dráha vypadala nelogicky, jelikož by se nikde nedotýkala původní dráhy, jedná se ale spíše o kosmetickou úpravu, jediný důsledek toho je, že pro všechny simulace bych doporučil editovat 3. list se Zemí a měsícem.

(Jednalo se o to, že bez převrácení os Io létalo uprostřed dráhy a nikde se nedotévalo původní dráhy, což vypadalo jako špatně spočítané). Je zajímavé, že když vystřelíme měsíc pod nějakým úhlem, "od planety", tak se poté může Perihelium naopak přiblížit k planetě. Což se může jevit divné, ale my víme, že po 1 oběhu se musí těleso opět nacházet na stejném místě a jelikož těleso letí v tom místě nahoru (úhel mezi průvodičem a pohybem planety je rovněž zachován), tak muselo těleso přiletět "zespodu", tudíž bylo blíže k planetě. Je tedy teoreticky možné takto svádět lodě z orbity, jelikož jejich perihelium pak bude v atmosféře. (Je divné brzdit loď tak, že nebudeme působit proti pohybu, ale částečně třeba i ve směru pohybu a od planety, ale očividně to jde (ono působení zase nesmí být samozřejmě až moc velké)).

Ještě mě napadla poznámka: asi není úplně jasné jak počítám ten úhel (výstřelu planety). Normálně máme vektor rychlosti planety, k tomu přičtu vektor rychlosti planety tak, že ho rozložím na x a y ose a pak pouze sečtu složky na jednotlivých osách a z toho pak už jen pouze jednoduše vyjádřím úhel (všechno jen goniometrické funkce).

4 M&M XXII. ročník 4. téma

4.1 M&M XXII. ročník; 4. téma; 1. příspěvek

Téma 4: Komprese mapových dat

Aplikace pro navigaci má dnes skoro každý na mobilu. Není problém mít v mobilu půlku Evropy a mít tak mapy všude po ruce. Jak ale taková rozsáhlá data ukládat, aby nebyla příliš velká a dala se snadno používat? Cílem tohoto tématu je zkusit vymyslet a realizovat algoritmy na efektivní ukládání mapových dat. Pro naše účely se budou mapy skládat jen z jednoduchých objektů – bodů, lomených čar a ploch. Každý bod má souřadnice, čáry a plochy jsou popsány souřadnicemi bodů, kterými procházejí, a plochy jsou navíc uzavřené. Pro ty, kteří chtějí své nápady i prakticky realizovat, jsme připravili testovací data, na kterých si mohou efektivitu svých algoritmů vyzkoušet.

Zkuste vymyslet (a případně realizovat) způsob, jak uložit mapová data, aby zabírala co nejméně prostoru a splňovala některou z následujících podmínek:

žádné další podmínky nejsou

byla lokálně dekomprimovatelná – pokud chci znát mapu v okolí daných souřadnic, stačí mi rozbalit jen vhodnou část dat a nemusím je nejprve rozbalit všechna

byla editovatelná – pokud chci přidat nebo změnit bod, čáru či plochu, nemusím nejprve vše rozbalit a pak opět zabalit

byla postupně komprimovatelná – objekty dostávám postupně a všechny se mi naráz nevejdou do paměti, proto je chci průběžně komprimovat a zapisovat na disk. Pořadí objektů si mohu předepsat.

Jak se budou vaše algoritmy chovat, pokud dostaneme mapu hustě osídlené oblasti s množstvím objektů na malé ploše? Budou stejně efektivní i pro řídké mapy venkovských oblastí?

Pro ty, které baví programovat, jsme připravili i praktická data z města i krajiny. Na odkazu <http://mam.mff.cuni.cz/media/tema/22/tema4/>

brno.txt si můžete stáhnout mapu středu Brna, na odkazu <http://mam.mff.cuni.cz/media/tema/22/tema4/jestrebi.txt> si můžete stáhnout mapu vesnických oblastí okolo Jestřebí. Soubor je textový v následujícím formátu:

```
b c p
sy1 sx1
sy2 sx2
...
syb sxb
c1l sc1ly sc11x sc12y sc12y ... sc1ly sc1lx
...
ccl sccl1y sccl1x scc2y scc2y ... scclly scclx
p1l sp1ly sp11x sp12y sp12y ... sp1ly sp1lx sp1ly sp1lx
...
ppl spply spp1x spp2y spp2y ... spply spplx spply spplx
```

Na prvním řádku je uveden počet bodů, cest a ploch. Po nich následují body, cesty a plochy, vždy jeden objekt na jeden řádek. Body obsahují nejprve zeměpisnou šířku a pak zeměpisnou délku ve stupních. Cesty a plochy jsou popsány hraničními body a obsahují nejprve počet bodů na cestě/ploše a pak souřadnice jednotlivých bodů na ní. U ploch je poslední bod shodný s prvním.

Pokud budete váš algoritmus implementovat, důkladně ho vysvětlíte a okomentujete a napíšete současně program pro kompresi i dekompresi dat, ať ho můžeme vyzkoušet na různých datech.

Na začátek: všechny informace, celý soubor je tvořen z bitů, bit má hodnotu 0 nebo 1. Nám jde o to, aby celkový počet bitů byl co nejmenší. Pro začátek našeho povídání jsem si vybral hned 1. souřadnici a to je y 49.195 170 4 x 16.609 623 8 na této souřadnici si z počátku budeme vše ukazovat.

Nejprve se krátce podívám, na to v jakém formátu jsou uložena data teď. Soubor Brno.txt má velikost 499 521 bajtů a jeho kódování je ANSI. Jak jsem pochopil, tak data jsou zapsána jako znak „4“, znak „9“ znak „.“, znak „1“... znak pro další řádek...

Hned na začátek jsem si řekl, že číslo určitě musí být převedeno do formátu čísla a ne skupiny znaků, to je první věc. Dále mě napadlo, že by se dala odstranit desetinná čárka, většina čísel stejně obsahuje 6 desetinných míst, tudíž na udání pozice bychom stejně potřebovali několik bitů (když bychom počítali od předu, tak vždy 2 a když odzadu tak 3). Navíc by to, že zde jsou 0 žádné místo neušetřilo, jelikož každé číslo musí mít svůj nějaký předem vymezený prostor. Tudíž každé číslo nejprve rozšíříme na 7 desetinných míst a pak budeme vypouštět desetinnou čárku.

Souřadnice se nám změnili tedy teď na y 491 951 704 x 166 096 238. Nyní jsem začal přemýšlet o tom jak čísla budu převádět na informaci ve tvaru bitů. Spočítal jsem si, že $2^{29} = 536\,870\,912$ Což by mi mělo stačit. Ale zastavme se teď na chvíli, takto bych mohl kódovat souřadnice pouze do 53° a je jasné, že pravděpodobně (pokud mají být souřadnice použitelné pro celou zemi) budu potřebovat na ose y 180 a na x 360 (buďto budu brát celou Zemi v kuse bez přechodu přes rovník a bez 180-tého poledníku nebo 1 bit na určení polokoule). Navíc by data rozhodně nebyla lokálně dekomprimovatelná.

Následovně mě napadlo, že kdybychom měli data pouze pro nějakou oblast (třeba ČR) mohli bychom změnit začátek vztažné soustavy, tím by se nám zmenšil rozsah čísel, což by ušetřilo další byty. A od toho už byl jen krůček k myšlence rozsekat celou mapu na sektory.

Na začátek si představme že kamera navigace je přiblížená a je potřeba vykreslovat jen několik nejbližších kilometrů, díky tomu bude lepší když sektory budou mít pouze pár kilometrů, když však mapu oddálíme, bude potřeba vykreslovat více a více sektorů a tím pádem více a více bodů atd. Otázkou

je jak to pak bude zvládat grafická karta a procesor navigace. Tento problém budeme řešit podrobněji později. Abychom si však shrnuli tuto myšlenku: mapa bude rozdělena na sektory, na začátku datového úseku každého sektoru budou začáteční y x souřadnice a následovně budou udávány pouze relativní souřadnice k první (výchozí = absolutní) souřadnici.

Tudíž zápis dat bude vypadat asi nějak takto: "souřadnice absolutního bodu sektoru"; "počet souřadnic v sektoru"; "relativní souřadnice 1. bodu v sektoru"; "2. bodu" atd.

Problémy tu jsou hned 2, ten menší: jak velké mají být sektory. To se dá vypočítat. Za druhé, co s křivkami a plochami? Pokud se křivka nachází v jednom sektoru o nic více méně nejde, pokud ve více, nastává problém. V tomto případě bude určitě potřeba křivku nebo plochu rozdělit do jednotlivých sektorů - to samo o sobě bude trochu složitější úkon (A to z více hledisek). To však vyprodukuje další data. Je však ale jasné, že nějaké sektory tak jako tak musí být.

Jedna z možností jak tento problém řešit je, že každý bod by měl svoje ID, tudíž na začátek bychom měli pouze výčet bodů (rozdělených od sektorů) a poté by byly pouze seznamy čar a objektů. Zde by hodně záleželo, které sefmenty navigace chceme šetřit nejvíce takže krátce k optimalizaci:

Zatím jsme si přibližně načrtli tak nějak by data mohla být uchovávána, teď bychom se mohli krátce vrátit k ostatním komponentům, již dříve jsme zmínili, že nechceme aby se nám do paměti navigace načítala všechna data. Tento problém jsme vyřešili tím, že jsme mapu rozdělili na sektory, což když ale mapu oddálíme? Je několik možností jak to řešit:

Buďto můžeme pro jiné rozlišení nakreslit novou mapu, ale to by asi vyprodukovalo poměrně dost nových dat, takže asi ne. . . . Nebo můžeme před každou souřadnicí vyhradit nějaké místo (2 až 4 bity) které budou určovat důležitost souřadnice a s postupným oddalováním budou souřadnice a ostatní věci mizet postupně a ne všechny najednou.

Nakonec tedy napíšu jak si myslím, že by mohly přibližně data po uložení vypadat. (Znaky „“ a ; jsou zde použity pouze pro odlišení různých segmentů a uloženém datovém souboru by samozřejmě nebyly) Vše by pro ušetření

místa rovněž bylo zpatláno na jednom řádku, ale pro přehlednost si to trochu naformátujeme, jsou zde také pro přehlednost požity C++ komentáře:

// 1. sektor

```
„ysector1“; „xsector1“; „m“;

„id1“; „y1 - ysector1“; „x1 - xsector1“;

„id2“; „y2 - ysector1“; „x2 - xsector1“;

„id3“; „y3 - ysector1“; „x3 - xsector1“;

„idm“; „ym - ysector1“; „xm - xsector1“;
```

// 2. sektor

```
„ysector2“; „xsector2“; „n“;

„idm+1“; „ym+1 - ysector2“; „xm+1 - xsector2“;

„idm+2“; „ym+2 - ysector2“; „xm+2 - xsector2“;

„idm+3“; „ym+3 - ysector2“; „xm+3 - xsector2“;

„idm+n“; „ym+n - ysector2“; „xm+n - xsector2“;
```

// seznam křivek

```
„idk1“; „d“; „idd1“; „idd2“; „idd3“; „iddd“;

„idk2“; „e“; „ide1“; „ide2“; „ide3“; „idee“;

„idk3“; „f“; „idf1“; „idf2“; „idf3“; „idff“;

„idkb“; „g“; „idg1“; „idg2“; „idg3“; „idgg“;
```

// seznam tvarů

„ id_{t1} “; „ t “; „ id_{t1} “; „ id_{t2} “; „ id_{t3} “; „ id_{tt} “;

„ id_{t2} “; „ r “; „ id_{r1} “; „ id_{r2} “; „ id_{r3} “; „ id_{rr} “;

„ id_{t3} “; „ s “; „ id_{s1} “; „ id_{s2} “; „ id_{s3} “; „ id_{ss} “;

„ id_{tv} “; „ u “; „ id_{u1} “; „ id_{u2} “; „ id_{u3} “; „ id_{uu} “;

Samozřejmě by také záviselo na kvalitě procesoru, RAM, programátora. . . Asi ideální postup je, kdyby program vždy zjistil, jaké sektory má vykreslit, zapamatoval si všechny body zde, poté zjistil jaké z těchto bodů tvoří křivky a tvary a poté si načetl i zbývající body potřebné pro vykreslení křivek a tvarů a poté je všechny vykreslil.

Jinak tvary se automaticky budou vracet do 1. body (tím se uzavřou).

Pokud bychom chtěli dát bodům priority, bylo asi nejvhodnější je dát na konec každého bodu nebo druhá varianta: každá křivka a tvar budou mít svojí prioritu a poté ještě bude nakonec výčet bodů (ID) s prioritami. (bodů, které nejsou součástí křivek a tvarů)

Nakonec bych ještě chtěl ujasnit, že: „ $y_1 - y_{sector_1}$ “; znamená, že máme souřadnice nějakého bodu (použijme ukázkový bod): y_1 49.195 170 4 x 16.609 623 8, to převedeme na: y_1 491 951 704 x_1 166 096 238 A nyní řekněme, že chceme mít sektory takové, aby šly zakódovat přesně 16 bity. Tudíž:

$$y_{sector_1} = 491\,913\,216$$

$$y = 38\,488$$

$$x_{sector_1} = 166\,068\,224$$

$$x = 28\,014$$

Toto byl pouze příklad (například se rozhodneme, že chceme mít 11 bitů nebo 26). To se bude samozřejmě i odvíjet na typu krajiny. To by bylo k základní koncepci programu více méně vše.

4.2 M&M XXII. ročník; 4. téma; 2. příspěvek

-

V příspěvku bych se chtěl vyjádřit k tomu, podle čeho bude nejlepší rozdělovat sektory (jak velké), některé další triky, co mě napadly a nakonec nevýhody polárních souřadnic.

Připomeneme si jak jsem v minulém čísle navrhoval sektor:

```
// sektor
„ysector1“; „xsector1“; „m“;
„id1“; „y1 - ysector1“; „x1 - xsector1“;
„id2“; „y2 - ysector1“; „x2 - xsector1“;
„idm“; „ym - ysector1“; „xm - xsector1“;
```

Souřadnice y_{sector_1} zabírají nějaké byty n_y , x_{sector_1} pak nějaké n_x , podle mě je nejlogičtější, aby se dělily stejně, tudíž $n_y = n_x$. A nakonec m (počet souřadnic) bude mít nějakou velikost. Díky tomu, že počet souřadnic je uveden, tak nepotřebujeme žádný end_{sector} . A pokud bychom řekneme dělit sektory podle prvních 6 bitů, tak každou souřadnici zmenšíme o 6 bitů, (max je 36 bitů (pokud jedeme do 360°)). Takže v tomto případě by to pak bylo 30. V pokud se podíváme na data, tak vidíme, že v jednom sektoru by bylo opravdu mnoho čísel a každé by s zmenšilo o 6 bitů, což opravdu stojí za zmínku, jelikož informace o sektoru jsou oproti tomu zanedbatelné.

A toto mě přivedlo na novou myšlenku a to, že by bylo možná lepší rozdělit mapu na sektory a ty na podsektory a ty opět na podsektory a takto třeba $5\times$ nebo $6\times$. Navíc asi nebude potřeba na začátku každého podsektoru psát celkové souřadnice, ale poze nějaké relativní oproti počátku sektoru.

Napadlo mě, že by nejprve mohly mít rozděleny y -ové souřadnice a poté by byly rozděleny x -ové souřadnice, že by zde byl řádek mapy, pak další atd., ale poté by data ztrácela lokální dekomprimovatelnost, jelikož bychom vždy museli přečíst několik řádků celé mapy a tak bude lepší rozdělit mapu na sektory, postupně udávat jejich výčet a poté tyto sektory rozdělit na podsektory a opět udělat výčet a tak dále...

$„y_{sector_1}“; „x_{sector_1}“; „m_1“;$	1. sektor
$„y_{sector_{pod_11}}“; „x_{sector_{pod_11}}“; „m_{11}“;$	1. podsektor 1. sektoru
$„y_{sector_{pod_21}}“; „x_{sector_{pod_21}}“; „m_{21}“;$	1. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
$„y_{sector_{pod_31}}“; „x_{sector_{pod_31}}“; „m_{31}“;$	1. podpodpodsektor 1. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
$„id_1“; „y_{bod1}“; „x_{bod1}“;$	1. bod
$„id_2“; „y_{bod2}“; „x_{bod2}“;$	2. bod
$„id_3“; „y_{bod3}“; „x_{bod3}“;$	3. bod
$„y_{sector_{pod_32}}“; „x_{sector_{pod_32}}“; „m_{32}“;$	2. podpodpodsektor 1. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
$„y_{sector_{pod_33}}“; „x_{sector_{pod_33}}“; „m_{33}“;$	3. podpodpodsektor 1. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
...	
$„y_{sector_{pod_22}}“; „x_{sector_{pod_22}}“; „m_{22}“;$	2. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
$„y_{sector_{pod_23}}“; „x_{sector_{pod_23}}“; „m_{23}“;$	3. podpodsektor 1. podsektor 1. sektoru
...	
$„y_{sector_{pod_12}}“; „x_{sector_{pod_12}}“; „m_{12}“;$	2. podsektor 1. sektoru
$„y_{sector_{pod_13}}“; „x_{sector_{pod_13}}“; „m_{13}“;$	3. podsektor 1. sektoru
...	
$„y_{sector_2}“; „x_{sector_2}“; „m_2“;$	2.sektor
$„y_{sector_3}“; „x_{sector_3}“; „m_3“;$	3.sektor
...	

Vznikne nám taková stromová struktura. Nyní si potřebujeme nějak určit jaká bude nejlepší velikost pro sektory.

Uveďme si příklad: řekněme, že pracujeme ještě na nějakém velkém rozlišení mapy, takže ať uděláme sektory jakkoliv, tak vždy se v nich bou vyskytovat nějaké body... A řekněme, že se rozhodneme pro velikost 3 bitů (2^3 podsektorů) (kódujeme nějakou část souřadnic (20. až 23. bit...)). Poté, zde na začátku budou souřadnice sektoru¹⁸ a počet bodů sektoru m nebo počet podsektorů. Dále nám přibudou jednotlivé podsektory - ty budou mít 2×3 bity navíc a k tomu ještě nějaké bity na počet bodů (toto může záležet na úrovni, ale nebude jich řádově víc než 20 (bitů)). To bychom měli bity, které budeme mít navíc, naopak ale všechny body v podúrovních budou o 3 bity menší. A tato ušetřená velikost bude v našem příkladu $3m$. Což bude výrazně víc než kolik přidají data kódující podúrovně.

¹⁸může se jednat rovněž i o pod sektor a souřadnice budou relativní oproti začátku onoho sektoru, ale pro zjednodušení nám to stačí takto.

Efektivita ale bude klesat s počtem podsektorů. Pokud bychom třeba kódovali pouze město Brno, nebo mapu Pražského hradu, tak by bylo nejvýhodnější nejprve rozdělit mapu na malé sektory a poté udat souřadnice pouze toho sektoru, kde se něco nachází, tím by nám velice krátkým kódem vypadla třeba až polovina všech dat, poté bychom opět aplikovali výše uvedené rozsektorování, dokud by se to ještě vyplatilo.

Nevýhodné se stane rozdělování pokud by už další podsektory byly malé a obsahovali málo bodů, například 1, jelikož poté by už kód pro podsektor zabíral více místa než pokud bychom body jen vypsali.

Pokud bude mít podsektorů 6 bitů, tak bude obsahovat do $2^{56} = 65\,536$ bodů nebo podsektorů. Pokud bude obsahovat podsektory, tak to je až příliš a pokud pouze body, tak jejich hustota tak velká nebude, takže pro body by to už mohlo být ok. Osobně bych narhoval podsektory o velikosti 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5. K přesnějšímu určení bychom však potřebovali asi ozkoušet data, samozřejmě se také budou data chovat jinak na Sibiři a jinak v centru Prahy.

Dále ještě něco o polárních souřadnicích, podle mě nemá jejich implementace smysl. A to z toho důvodu, že pokud chceme nějak vyjádřit úhel, tak pokud máme už nějaké pole (třeba 5×5), tak abychom byli schopni popsat nějakou souřadnici, tak potřebujeme zadat úhel a vzdálenost a abychom byli tyto souřadnice schopni nějak rozumně určit, tak bude potřeba u obojího několik desetinných míst (záleží samozřejmě, na jednotce, ale dat bude mnoho). Tudíž přesnost bude snížena a dat bude mnohem více, tudíž si myslím, že ani není třeba se jimi nějak výrazněji zabývat. (nic se nedá vyloučit bez testování, řekl bych, že ale asi nebude žádná reálná situace, kde by tyto souřadnice našly u našeho algoritmu smysl, jediné co mě napadá, že kdybychom chtěli kreslit silnice a zaznamenávat nějaký úhel o který silnice zatáčí (vzdálenost jednotlivých bodů by mohla být fixní) i tak by ale podle mě docházelo k ztrátě přesnosti a data by podle mě zabírala více).

K příloze (<http://ulozto.cz/x6iVCRQp/preview-22-00-04-04-xlsx>): Jsou zde 4 listy "Zpracování"; "Mapa"; "Pořadí dat" a "Test výpočtu". Ve "Zpracování" je několik testovacích souřadnic a ty jsou postupně předeny na čísla a nakonec podle nastavení rozsekány na podsektory, celý proces je podrobněji popsán tam. Dále je zde list "Mapa", který je pouze vizualizací

mapy s dělením 3, 3, 3, 5. Dále zde je list "Pořadí dat" který ukazuje jak by data z mapy šly ve zdrojovém souboru souřadnice postupně za sebou. Nakonec je zde list "Test výpočtu". Kde je 1000 náhodně vygenerovaných čísel, které zařazujeme do sektorů, jedná se o malé zjednodušení, jelikož zde máme pouze čísla od 0 do 2^x (x si můžeme zvolit od 2 do 18) na pouze jedné ose, celý problém je zde výrazně zjednodušen (pouze sektory, žádné podsektory atd. . . a pouze 1 osa), ale můžeme si zde spočítat o kolik se liší různé varianty velikostně. Jedná se pouze o náhodně generovaná čísla (1000 čísel se náhodně vygeneruje poté se odstraní ta co se opakují).

Pár dodatků na konec:

Jak máme na začátku sektorů vždy počet bodů, tak je otázka jak správně vyhradit počet bitů, jelikož na určitém rozlišení (když máme nejmenší sektory), tak zde třeba může být 65 536 možných bodů, ale reálně tu třeba může být skutečných bodů 5 nebo 1023 a nebo 1025, to je potřeba rovněž otestovat, je tedy možné, že by třeba mapa měla nějaký maximální počet bodů na určitou plochu. Ale toto opět záleží na datech a jak moc chceme riskovat.

Sektory mají tu výhodu, že pokud se pohybujeme uprostřed nějakých velkých sektorů, tak jsou data krásně lokálně dekomprimovatelná, pokud se však pohybujeme na přechodech velkých sektorů (třeba pokud bychom měli rozdělenou ČR na 2 sektory a my byli na oné hranici), tak 2 sousední body by od sebe mohli být vzdáleny snad až statisíce řádků dat a je otázka jestli by to vůbec zvládala paměť (snad by ano, ale . . . asi to nechceme . . .), je otázka jestli bychom nechtěli udělat něco takového, že některé body by se tu třeba vyskytovaly i víckrát a sektory se překrývaly, ale toto opět záleží na našich preferencích, hardwaru a implementaci.

4.3 M&M XXII. ročník; 4. téma; 3. příspěvek

-

Tento článek je spíše pouze dokumentací k mému poslednímu výtvoru.

Příloha ke stáhnutí:

<http://ulozto.cz/xYv6xADP/preview2-22-00-04-18-xlsx>

Nejprve ale ještě pár teoretických aspektů, které mě napadly. Nejprve k polárním souřadnicím: napadl mě případ, kdy by se možná hodily a to v případě, kdybychom měli nějaké město složené pouze ze čtverců a obdélníků (čtvrtě by měly tento tvar), poté by 0 znamenala vpřed, 1 doprava, 11 otočit zpět a 111 doleva. Toto je ale v reálném světě nereálné.

Dále jsem měl ještě drobný nápad ohledně poslední zmínky o komprimaci dat a to, že v hlavičce sektorů nebudeme udávat počet bodů v sektoru, ale počet podsektorů a v hlavičkách podsektorů počet podpodsektorů – myslím si není potřeba toto nějak zvláště komentovat, prostě bude akorát potřeba uložit menší číslo a tudíž to zabere méně bitů.

Nakonec jsem ještě přemýšlel o tom jestli by sektory měly být čtvercové a myslím si, že v reálném světě pravděpodobně ano. Případ, kde by to neplatilo si můžeme představit jako silnici vedoucí přímo po rovnoběžce, poté budeme chtít všechny y -ové souřadnice ořezat na 1 bit, zatímco x -ová souřadnice bude komplikovanější.

A teď již k příloze: Je zde možnost kódovat x -ovou souřadnici do sektorů, podsektorů a podpodsektorů (3 úrovně), můžeme volit jednotlivé velikosti mezi nimi. Když jedeme postupně ovládacím panelem, zleva doprava, tak nejprve je zde kolik bitů potřebujeme na zakódování (minimální počet (může zvolit i více, ale je to zbytečné)). Poté tu máme celkový součet rozdělení bitů (k rozdělování se dostaneme za moment). Dále je zde oříznutí – když jsem dělal pokusy, tak jsem zjistil, že pokud kódujeme celá data, tak se nikam v našem průzkumu neposouváme, jelikož se vždy shrnuli do jednoho sektoru a přibližně 10 podsektorů a reálně jsme nic nového nezjistili. Proto jsem se rozhodl, že je oříznu a to tak, že najdu nejmenší x -ovou souřadnici a odečtu ji od zbylých. Komprimujeme tedy jakoby výřez z mapy. Komprimování nastává pokud je v příslušném poli 1, když je zde něco jiného tak ne.

Dále zde máme distribuci jednotlivých bitů jednotlivým sektorům. Zde volíme velikost sektorů.

Poté zde už jsou jen výstupy. Vše to jsou jen výstupy vytažené z tabulky.

Občas je potřeba najet na koncovou buňku výpočtu (třeba u výstupu na „nová 2“) rozkliknout a dát Enter, jelikož občas si Excel zapomene přepočítat hodnoty.

Celé je to ve zkratce počítáno tak, že nejprve jsou vypočítány hodnoty sektorů, podsektorů a podpodsektorů, poté jsou jednotlivé části různě tisknuty vedle sebe a dohledávány jedna po druhé. Z technických důvodů je zde omezení, že maximální velikost sektoru a podsektoru je 9 bitů, šlo by to udělat i na více, ale zdvojnásobení velikosti $2\times$ by prodloužilo čas výpočtu s druhou mocninou, tudíž jsem zvolil kompromis. Pokud budeme zkoušet velikosti polí racionálně, tak stejně nebudeme potřebovat více.

Dále už jen probíhá výpočet z dostupných dat, vše je v tabulce popsáno a proto nemá smysl to zde zdlouhavě rozebírat.

5 M&M XXII. ročník 5. téma

5.1 M&M XXII. ročník; 5. téma; 1. příspěvek

Téma 5: Rozpustilá rozpustnost

Většina z nás si nedokáže představit ráno bez svého oblíbeného teplého nápoje. Někteří si ještě chtějí osladit život, a tak přidají pár lžiček cukru. Kolik cukru (sacharózy) však můžeme přidat do našeho ranního šálku teplé tekutiny, aby se ještě rozpustil? A jaká bude hraniční hodnota pro med? Bude se lišit rozpustnost sladidla pro čaj, kakao a kávu? Jak se změní maximální možné množství rozpouštěné látky po vychladnutí nápoje na pokojovou teplotu? Proč se Granko (případně jiné instantní kakaové nápoje) rozpouští dobře i ve studeném mléce na rozdíl od kakaa? Lze rozpustit gumového medvídka?

Jak již bylo naznačeno v úvodu, budeme se zabývat rozpustností různých látek v různých rozpouštědlech za různých podmínek. Hlavním cílem bude experimentálně určit rozpustnosti dostupných látek ve vhodném rozpouštědle a jejich závislosti na zvolených parametrech (teplota, tvrdost vody a další). Nemusíte se však omezovat pouze na pevné látky (jako např. cukr, sůl, soda, ...) a vodu, můžete vyzkoušet i jiná rozpouštědla (nasycený roztok NaCl ve vodě, olej, atd.), popřípadě zkusit mísit i dvě různé kapaliny. Můžete se zabývat také změnami vlastností nasycených roztoků oproti samotnému rozpouštědlu (např. změna hustoty nebo viskozity). Na problémy lze nahlížet i z teoretického hlediska. Můžete tak zkusit odhalit příčiny chování roztoků v závislosti na vybraném parametru, důvod větší rozpustnosti cukru ve vodě než soli v témže rozpouštědle, či diskutovat (ne)existenci hraničních teplot, při nichž se již rozpustnost dané látky v daném rozpouštědle nebude měnit. Při svém bádání se můžete inspirovat také otázkami v úvodu.

Popis postupu při experimentu a dosažené výsledky nezapomeňte doplnit odhadem chyby měření a porovnat s tabelovanými hodnotami (podaří-li se vám je dohledat). Hodně zábavy nejen při experimentování!

6 M&M XXII. ročník 1. série

6.1 M&M XXII. ročník; 1. série; 1. úloha

Jakou nejdelší dobu v kuse může družice na kruhové rovníkové dráze s výškou 500 km sledovat jedno konkrétní místo na zemském povrchu?

Nejprve si zde vypíšeme všechny údaje a vztahy, co budeme později potřebovat:

$$r_z \doteq 6\,378\,000\text{ m}$$

$$h = 500\,000\text{ m}$$

$$r_d \doteq 6\,878\,000\text{ m}$$

$$m_z \doteq 5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}$$

$$\kappa \doteq 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$F_g = F_o \text{ (Gravitační síla se rovná odstředivé.)}$$

$$a_g = a_o \text{ (Gravitační zrychlení se rovná odstředivému.)}$$

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F_o = F_d = m \cdot a_d = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

$$a_g = \kappa \frac{M}{R^2}$$

$$a_o = a_d = \frac{v^2}{r}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$t_z \doteq 23\text{ hodin } 56\text{ minut } 4\text{ sekundy} = 86\,164\text{ s (Čas, za jaký se země otočí kolem osy o } 360^\circ)$$

Je několik způsobů jak tuto úlohu vypočítat (můžeme vycházet z více vztahů)

$$F_g = F_o$$

$$\kappa \frac{m_z m_d}{r_d^2} = m_d \omega^2 r$$

$$\kappa m_z = \omega^2 r^3$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa m_z}{r^3}}$$

$$\omega \approx 1,106 \cdot 10^{-3}\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Takto jsme spočítali úhlovou rychlost s jakou se pohybuje družice okolo zemského jádra.

$$t = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$t = \frac{2\pi}{1,106 \cdot 10^{-3}}$$

$$t \approx 5\,679\text{ s} \approx 1\text{ h } 34,7\text{ min}$$

Vypočetli jsme dobu oběhu.

A nebo:

$$a_g = a_o = a_d$$

$$\kappa \frac{m_z}{r_d^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$\kappa m_z = v^2 r$$

$$v = \sqrt{\frac{\kappa m_z}{r}}$$

$$v \approx 7\,614 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Takto jsme spočítali rychlost družice.

$$t = \frac{2\pi r}{v}$$

$$t = \frac{2\pi \cdot 6\,878\,000}{8\,231}$$

$$t \approx 5\,676 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 34,6 \text{ min}$$

Časy se takřka schodují, nepřesnost je způsobena spíše přesností hodnot se kterými počítáme v zadání. K tomuto výsledku bychom se mohli dostat i pomocí dalších vztahů, ale nebudeme si je tady všechny ukazovat.

Země se otáčí s úhlovou rychlostí:

$$\omega_z = \frac{2\pi}{t}$$

$$\omega_z = \frac{2\pi}{86\,164}$$

$$\omega_z \approx 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Nyní musíme vymyslet, jak bude družice létat. Po zamyšlení zjistíme to, že bude záviset na zeměpisné šířce, například, když bude místo které bude družice sledovat na pólu, tak bude nejvýhodnější, když bude družice létat přímo přes pól. V případě, když však bude místo pozorování na rovníku, bude nejvýhodnější, když bude družice létat přímo nad rovníkem po směru rotace Země (úhlové rotace se budou odčítat). Takto zjistíme výsledky úlohy v krajních bodech.

Dále budeme používat dříve vypočtenou hodnotu:

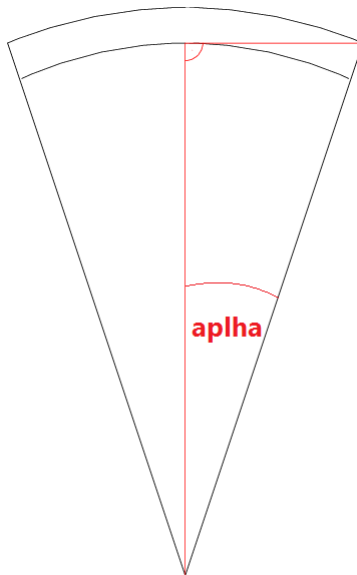
$$\omega \approx 1,106 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

V případě, že bude místo pozorování na pólu, neexistuje způsob jak bychom mohli poslat družici tak, aby to rotace Země ovlivnila. Bude tedy platit:

$$\omega_{pol} = 1,106 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Nyní musíme vypočítat jaký úhel družice urazí (vzhledem k zemskému jádru) během svého oběhu. Tento úhel bude neměnný v závislosti na zeměpisné šířce. Úhel α spočítáme pomocí náčrtku (obrázek 3). Jak vidíme jedná se pouze o Pythagorovu větu a použití funkce sinus (nebo pouze cosinus):

$$\cos \alpha = \frac{6\,378}{6\,878}$$



Obrázek 3: Náčrtek úhlu

$$\alpha \approx 0,384 \text{ rad}$$

Nás však zajímá spíše úhel $2\alpha \approx 0,767 \text{ rad}$.

Jak už víme, úhlová rychlost družice je: $\omega_{pol} = 1,106 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ Čas po který družice uvidí objekt je:

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_{pol}}$$

$$t = \frac{0,767}{1,106 \cdot 10^{-3}}$$

$$t = 694 \text{ s} = 11 \text{ min } 34 \text{ s}$$

To bude čas na pólu. Na rovníku se úhlová rychlost země odečte od družice (družice poletí ve směru rotace Země).

$$\omega_{rovnik} = \omega - \omega_z$$

$$\omega_{rovnik} = 1,106 \cdot 10^{-3} - 7,292 \cdot 10^{-5}$$

$$\omega_{rovnik} = 1,033 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

A nyní stejně čas:

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_{rovnik}}$$

$$t = \frac{0,767}{1,033 \cdot 10^{-3}}$$

Maximální čas se bude v závislosti na zeměpisné šířce pohybovat mezi 694 s a 743 s.

Když budeme stát na n -té rovníkové, naše úhlová rotace se bude měnit v závislosti na vzdálenosti od rovníku, čím budeme dále, tím bude naše úhlová rychlost menší (ve skutečnosti jde především o vzdálenost od osy otáčení) A jelikož je naše země koule, bude platit, že úhlová rotace na n -té rovníkové bude: $\omega_z \cdot \cos n$. Tuto úhlovou rychlost budeme od družice odčítat (družice se bude pohybovat vždy ve směru rotace Země (v bodě přeletu) a poletí rovnoběžně s rovníkem (pouze však v bodě přeletu místa). Výsledný postup pro výpočet délky přeletu je:

$$\omega_{rovnobezka} = \omega - \omega_z \cdot \cos n$$

$$\omega_{rovnobezka} = 1,106 \cdot 10^{-3} - 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \cos x$$

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_{rovnobezka}} = \frac{0,767}{1,106 \cdot 10^{-3} - 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \cos x}$$

Všimněte si, že: $\cos 0^\circ = 1$ a $\cos 90^\circ = 0$. Hodnoty pro rovník a pól tedy logicky vyjdou stejně. Náš hledaný vzorec pro výpočet délky sledování je:

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_{rovnobezka}} = \frac{0,767}{1,106 \cdot 10^{-3} - 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \cos x} \quad (10)$$

6.2 M&M XXII. ročník; 1. série; 2. úloha

Lišák Riki se pustil do zahradničení. Má záhonek a pěstuje tři druhy zeleniny: artyčoky, brambory a celer. Na jejich pěstování se ale vztahují určitá pravidla:

- 1. V záhonku nesmí být dva artyčoky hned vedle sebe.*
- 2. Brambor nemůže růst mezi dvěma stejnými rostlinami.*
- 3. Celer nevyroste, pokud má za jednoho souseda artyčok a za druhého brambor.*

Určete, kolika různými způsoby může Riki naplnit svůj záhonek, pokud se mu do něj vejde právě jedna řada s dvaceti rostlinami.

Na začátek si artyčok označím jako A ; brambor jako B a celer jako C . Následovně udělám to, že si zavedu "uspořádanou dvojici" (dále jako UD; kdykoliv se v textu vyskytne pouze "dvojce" je tím taktéž myšlena UD). Uspořádaná dvojice AB je dvojice, která obsahuje A a B v tomto pořadí. Ostatní UD jsou utvořeny obdobně. Rostliny si mohou takto dát do dvojic, jelikož, všechny rostliny se ve svých pravidlech pro růst zmiňují pouze o sousedních rostlinách. Celou úlohu si tak můžeme změnit na to, že se nachází 10 UD vedle sebe. Nyní potřebuji přijít na to, jaké dvojice se vedle sebe mohou nacházet. Dvojic může být $3^2 = 9$. A to: AA ; AB ; AC ; BA ; BB ; BC ; CA ; CB ; CC . Až na to, že v záhonku nesmí růst 2 A vedle sebe; vypadáva nám tedy US AA . A nyní zjistíme, za jakou dvojicí může následovat jako dvojice. Vezměme si například dvojice AB a AC ; B nemůže růst mezi 2 stejnými rostlinami a A nesmí růst vedle A . V tomto případě B roste mezi 2 stejnými rostlinami (A a A) a proto se tyto dvojice nemohou nacházet vedle sebe. Takto vyzkoušíme všechny možné dvojice a zjistíme jestli se mohou nacházet vedle sebe.

★		IN							
		AB	AC	BA	BB	BC	CA	CB	CC
OUT	AB		1		1			1	1
	AC		1		1			1	1
	BA	1				1		1	1
	BB			1		1	1		1
	BC	1		1			1	1	
	CA		1	1		1	1		1
	CB	1	1		1	1			1
	CC	1	1	1	1	1	1		1

Tabulka 9: INput, OUTput

Tabulka 9 nám ukazuje jaké dvojice mohou být následované jakými. Nejprve máme na 2. řádku výčet všech dvojic. To jsou v našem případě ty 1. dvojice. V 2. sloupci je opět seznam všech dvojic, to jsou v našem případě ty dvojice které následují. Pokud se v buňce nachází 1 znamená to, že dvojice se vedle sebe (v pořadí IN dvojice a OUT dvojice) mohou nacházet.

Nyní si dáme příklad, že jsme došli k závěru, že v nějakém stádiu může být 20 způsob jak dostat AB . Jak spočítáme další stupeň? Víme, že dvojice

AB může následovat pouze po dvojicích AC ; BB ; CB a CC . Podíváme se tedy do příslušných buněk a zjistíme, že v těchto buňkách jsou hodnoty 20; 20; 23 a 32. Tyto hodnoty sečteme a dostaneme 95. Mohla by vyvstat otázka: Proč? Jelikož tuto dvojici můžeme dostat pouze z předchozí čtveřice dvojic. Pak je nějaký počet možností jak můžeme nějakou z dvojic mám na mysli (AC ; BB ; CB a CC) dostat, součtem všech těchto možností se dostaneme k počtu možností dostání další dvojice (v tomto případě AB). Proto se nám objevuje tabulka 10.

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
AB	1	4	20	95	453	2 158	10 276	48 952	233 165	1 110 637
AC	1	4	20	95	453	2 158	10 276	48 952	233 165	1 110 637
BA	1	4	20	93	446	2 122	10 110	48 154	229 369	1 092 550
BB	1	4	20	94	448	2 133	10 162	48 405	230 563	1 098 232
BC	1	4	18	87	412	1 967	9 364	44 609	212 476	1 012 086
CA	1	5	24	114	543	2 586	12 320	58 681	279 515	1 331 397
CB	1	5	23	110	525	2 498	11 903	56 689	270 037	1 286 241
CC	1	7	32	154	732	3 487	16 611	79 119	376 872	1 795 125

Tabulka 10: Počet způsobů

Na začátek můžeme začít libovolnou dvojicí; proto je ve sloupečku 2 všude "1". Pak už postupujeme podle výše zmíněného postupu. Nakonec sečteme všechny hodnoty v sloupci 20 a dostaneme se k výsledku:

$$\sum_{AB_{20}}^{CC_{20}} = 9\,836\,905 \quad (11)$$

Existuje tedy 9 836 905 možností jak si Lišák Riki může naplnit svůj záhonek o 20 místech, aby mu vždy vše rostlo.

Když si ještě nakonec uděláme drobnou kontrolu, tak kdyby neexistovaly žádná pravidla měli bychom $9^{10} = 3\,486\,784\,401$ možností. Tudíž, když se na to odhadem podíváme, tak zjistíme, že jsme se pravděpodobně alespoň řádově trefili.

6.3 M&M XXII. ročník; 1. série; 3. úloha

Tomáš má balíček 52 karet (s třinácti různými symboly ve čtyřech barvách). Karty leží na stole lícem dolů a Tomáš vždy zvedne jednu kartu a odloží ji pryč, dokud nedojde balíček. Před odebráním karty ale ještě hádá, jakou má barvu. Dělá to chytře – vždy si tipne barvu, která se vyskytuje nejčastěji ve zbytku balíčku (pokud je jich víc, vybere si mezi nimi podle libosti). Dokažte, že se Tomáš trefí alespoň třináctkrát.

Je to velmi prosté:

- Začneme s tím, že si hru nejprve rozdělíme do 13 "úrovní".
- Do 13 proto, jelikož je vždy $(52/4 = 13)$ 13 karet stejné barvy.
- Aktuální úroveň je rovna nejvyššímu počtu karet jednoho druhu v balíku.
- **Není možné opustit úroveň a netrefit se.**
- V případě, že se nacházím v n -té úrovni a mám na výběr z x karet, mohu si vybrat kterou kartu budu tipovat. I kdybych se netrefil teď, trefím se až $x = 1$.
- Závěrem tedy je, že se vždy trefím alespoň $13\times$.
- Je však velmi pravděpodobné, že se trefím dokonce víckrát, jelikož minimálně $3\times$ budu mít na výběr mezi více možnostmi, který druh karet si vybrat.

6.4 M&M XXII. ročník; 1. série; 4. úloha

Strážce zajal oba cestovatele a rozhodl se jim zadat úkol. Pustí je pouze v případě, že se jim podaří úkol splnit. Nejdříve strážce pozve prvního cestovatele do místnosti, kde před ním na klasické šachovnici (8×8 polí) rozloží mince tak, aby na každém políčku byla právě jedna. Některé umístí nahoru rubem a některé lícem (jinak jsou mince zcela totožné). Poté strážce cestovateli prozradí jedno pole, řekněme mu únikové. Následně musí první cestovatel otočit jednu libovolnou minci. Pak strážce prvního cestovatele odvede a pozve druhého. Jeho úkolem je na základě rozložení mincí na šachovnici poznat, které pole je únikové. Pokud uspěje, jsou oba cestovatelé volní. Před plněním úkolu si mohou cestovatelé domluvit strategii. Strážce ale jejich rozhovor odposlechne a zvolí rozložení mincí i únikového pole tak, aby pokud možno neuspěli. Existuje pro cestovatele strategie, aby je strážce vždy pustil? Pokud ano, jaká?

Dle mého názoru se Petr s Tomášem nemají šanci dostat ven. Vymyslel jsem několik strategií a žádná nevede k bezpečnému úniku, nakonec se pokusím vysvětlit proč si myslím, že to nejde.

Všechny možnosti

Na začátek mě napadla asi ta nejvíce sado-maso metoda. A to, že se domluví na všech možných kombinacích. Těch by bylo 2^{64} , což není zrovna málo, ale budiž. . . a pak otočí tu minci, pod kterou je únikové pole, problém je, že když se nad tím zamyslíte, existuje 64 způsobů jak dosáhnout naprosto identického (konečného) rozložení mincí.

Prázdná plocha

Kdyby strážce otočil všechny mince jednou stranou někam, první cestovatel by jen otočil minci pod únikovým polem. Problémy tu jsou hned 2: strážce to neudělá, strážce může otočit 2, 3 mince a dát někam únikové pole. Cestovatel může zvýraznit/nechat zvýrazněné únikové pole, ale stejně nechá 2. cestovatele na výběr a stejně se nedostanou ven (ne se 100% pravděpodobností).

Binární metoda

Tato metoda má lecos podobného s ukládáním dat na počítači. Představme si, že to jak je mince otočná nám dává buď 0 nebo 1. Tady je několik způsobů co mě napadlo, první je, že by se čísla na šachovnici očíslovaly, únikové pole bude někde schované (pro ukázkou řekněme 38). Prvních 6 polí 1. řádku by pak kódovalo pozici. 38 zakódujeme jako 0 1 1 0 0 1. Problém je, že mi můžeme "opravit" pouze 1 hodnotu, ne 6. Strážce může dát klidně 38 a oněch 6 mincí dá v poloze 0 0 0 0 0 0. Nemusíme se tedy domluvit na prvních šesti polích prvního řádku, ale jakých, tak jako tak oněch 6 polí kat uslyší a dá je tak, aby se změnou jedné mince nedalo dosáhnout hodnoty, co cestovatelé potřebují. Nebo by mince mohly například odkazovat na nějaké části pole, které by něco kódovaly, ale co a jak? Tak jako tak to kat uslyší mince uspořádá tak aby se změnou jedné mince nedalo odkázat na tu konkrétní.

Závěr

Podle mého názoru je to poslední metoda, která dokazuje, že úloha je neřešitelná, jelikož každá mince nám může dát maximálně informaci 0 nebo 1. A k tomu abychom podle mě zjistili únikové pole je potřeba takových informací minimálně 6. Nebo můžeme říci, že k zakódování informace o pozici únikového pole potřebujeme 6 bitů, my však máme pouze 1 bit. Cestovatelé jsou tudíž v pasti!

Asi nejlepší co mohou udělat je, když se domluví, že první pole bude určovat v které polovině se pole nachází a jejich šance se zvýší z $\frac{1}{2^{64}}$ na $\frac{1}{2^{32}}$. (To kat nemůže nijak sabotovat)

7 M&M XXII. ročník 2. série

7.1 M&M XXII. ročník; 2. série; 1. úloha

Existuje funkce, o které víš, že na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ reálných čísel splňuje následující:

1. je všude definována
2. jejím oborem hodnot je podmnožina reálných čísel
3. má právě jedno lokální minimum¹⁹
4. nikde není konstantní

Tvůj úkol je jednoduchý: najdi takový interval $\langle a, b \rangle$, který toto minimum obsahuje, a přitom $b - a \leq 1/1\,000\,000$. Bohužel nevíš, jak je funkce definována. Naštěstí ale máš kouzelnou krabičku, které můžeš zadat libovolné reálné číslo a ona ti s naprostou přesností prozradí funkční hodnotu v tomto bodě. Chvilku jí to ale trvá, takže úkol chceš splnit na co nejméně použití krabičky. Za obzvláště efektivní řešení budou bonusové body.

¹⁹Existuje tedy nějaké x_0 (ono minimum), pro které platí, že na celém intervalu $\langle x_0, x_0 \rangle$ je funkce klesající a na celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je zase rostoucí.

Pro lepší ukázkou si nakresleme nějakou náhodnou funkci, která bude splňovat zadání:



Obrázek 4: Náčrtek náhodné funkce

Nejprve mě napadlo, že si úlohu mírně upravím a budu řešit derivaci funkce. Derivace předešlé funkce by vypadala přibližně takto:



Obrázek 5: Derivace náhodné funkce

Jak vidíme tak derivace je před hledaným bodem neustále záporná a poté neustále kladná. Hledáme tedy tudíž bod, kdy graf derivace osy přejde přes nulu. (Je jen jedno minimum (Funkce nikde není konstantní, tudíž derivace je rovna 0 skutečně pouze v 1 bodě.))

Začal bych tedy tím, že vyberu bod ve středu a tam určím jeho derivaci, tím rozhodnu na které polovině je minimum (to zabere 2 tahy, jelikož potřebuji znát 2 hodnoty s tím, že $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ (Zatím předpokládáme, že Δx se nemůže trefit do minima)). Dále, mohu jít na "jistotu" a vždy spočítat derivaci v polovině intervalu, určit v které polovině zvoleného intervalu se číslo nachází a postupně snížit interval na $\frac{1}{1000000}$. To by nám zabralo 40 pokusů,

Jelikož $\frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1048576}$ a ke každé derivaci potřebujeme 2 pokusy. Derivace má tu výhodu, že jednoznačně určujeme na které polovině se minimum nachází. Tudíž počet pokusů bude vždy stejný (40). Kdybychom se náhodou trefili do maxima mohli bychom dostat hodnotu derivace buď 0, v ten moment máme jistotu, že jsme našli vrchol. Nebo bychom postupně zmenšovali interval na kterém se minimum nachází, ale pokud by se náš úsek odkud bereme derivaci blížil 0 a náhodou by se stalo, že vrchol by byl na tomto intervalu, tak nám to stejně nevádí. Jelikož víme, že minimum je na intervalu dlouhém $\frac{1}{1048576} + 2 \cdot \Delta x$, což je stále méně než $\frac{1}{1000000}$. Počet nutných pokusů je tedy fixně 40.

Na začátek vždy chceme dělit interval na polovinu. Řekněme, že teď nechceme derivace. Začneme s tím, že zvolíme bod v polovině a zjistíme jeho funkční hodnotu. Poté si vybereme hodnotu 0,25 nebo 0,75. Řekněme, že tedy chceme znát hodnotu v 0,25. Pokud by číslo zde bylo menší znamená to, že minimum se nachází v polovině $(0; 0,5)^{20}$. Pokud by ale byla větší znamená to problém, v tom případě můžeme pouze vyloučit interval $(0; 0,25 >$.

Když půjdeme dále: Pokud bychom se neustále trefovali, zmenšovali bychom interval neustále na polovinu a k cíli bychom se dostali za 21 tahů (s 1. tahem interval nezmenšujeme). To je však hodně nepravděpodobné.

Vraťme se ale k variantě, kdy jsme neuspěli: Zeptali jsme se na hodnoty 0,5 a 0,25 a víme, že hodnota v 0,25 je větší než na 0,5. Můžeme tedy zkusit hodnotu 0,75. Pokud zde bude hodnota menší hodnota v 0,5 minimum bude na $(0,5; 1)$. Pokud bude hodnota větší, bude minimum na intervalu $(0,25; 0,75)$.

Možná jste si všimli, že jsme zde nezmínili případ, kdy by se hodnoty rovnaly, to znamená, že minimum se nachází mezi nimi. To, že se nám toto povede je však u náhodné funkce velmi nepravděpodobné, tudíž se na tuto možnost nemůžeme spoléhat a tužíš s ní ani nijak efektivně počítat.

Potřebujeme tedy vždy 1 tah na začátek a když se nám tedy nedaří tak další 2, abychom zredukovali interval na polovinu, tudíž celkem 41 tahů. Z

²⁰To že minimum není v 0 ani 1 vyplývá z toho že funkce je na 0 až x_0 klesající a na x_0 až 1 rostoucí; $x \neq x_0$

toho tedy vyplývá, že pokud potřebujeme interval zmenšit na polovinu $20\times$ je rozumné říci, že reálně budeme mít $10\times$ štěstí a $10\times$ smůlu tudíž budeme potřebovat: $1 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 31$ tahů. Nyní bychom mohli různě počítat pravděpodobnosti, ale když se na to podíváme porovnávací metodou, tak derivacemi to je 40 tahů. Tudíž můžeme říci, že tato metoda je efektivnější. Jinak by se též dalo říci, že v této metodě si vybíráme nějakou polovinu intervalu a pak doufáme, že potvrdíme, že minimum se nachází právě zde.

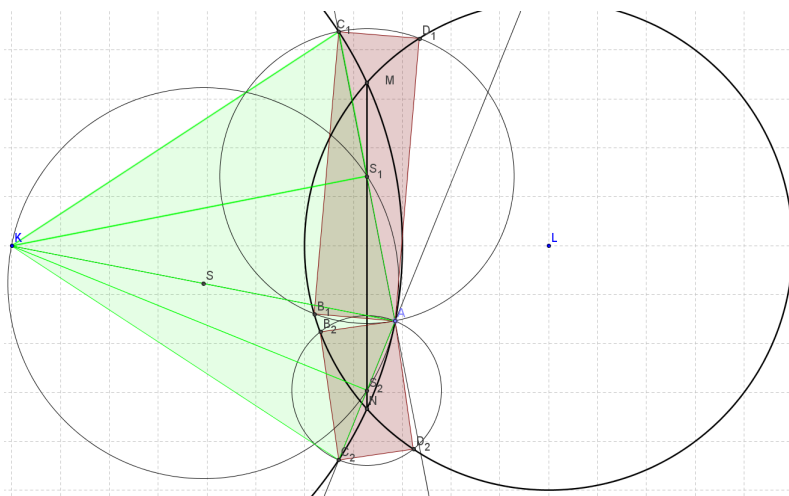
A nakonec je zde taková metoda, do které bych se ale moc nepouštěl. Spočívá v tom, že když budeme mít pocit, že dokážeme odhadnout nějaký interval, ve kterém se funkce nachází. Pak zjistíme hodnotu v krajních bodech intervalu x_1 a x_3 . Poté hodnotu ve středu x_2 . Naším cílem je aby: $x_1 \geq x_2 \leq x_3$, reálně ale hrozí: $x_1 < x_2 < x_3$ nebo $x_1 > x_2 > x_3$. První případ by znamenal, že minimum na intervalu je, druhý a třetí, že není. Tento postup by v případě úspěchu mohl pár tahů ušetřit nebo naopak potřebnou dobu na uhádnutí prodloužit.

Dále jsem také přemýšlel nad dělením intervalu na polovinu, v úvahu připadá ještě tak dělení intervalu na třetiny. Problém však je, že potřebujeme 2 tahy na to, abychom vyřadili pouze třetinu a poté budeme tlačeni k metodě polovin. Tudíž ji můžeme použít pouze $1\times$. A navíc pokud bychom jednou provedli metodu "třetin" a poté $19\times$ metodu polovin, minimum by jsme znali na $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{786\,432}$, což není dostatečná přesnost. Tudíž bychom potřebovali $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{786\,432}$, což však ale znamená, že první tah by byl zcela zbytečný (tudíž nad touto metodou by se dalo uvažovat v případě, kdybychom potřebovali jinou přesnost).

Dále jsem ještě přemýšlel nad dalším riskováním, ale vzhledem k tomu, jak může být funkce nevyzpytatelná jsem došel k závěru, že riskování se nakonec vyplatí pouze vyjímečně nevyplatí.

7.2 M&M XXII. ročník; 2. série; 2. úloha

Dvě kružnice k , l se protínají v bodech M a N . Nechť $ABCD$ je obdélník, přičemž vrcholy A a C leží na k , vrcholy B a D leží na l . Dokaž, že průsečík úhlopříček obdélníka $ABCD$ leží na úsečce MN .



Hledaná vlastnost podle mě vyplývá z jednoho ze způsobů jak daný obdélník narýsovat:

Z předpokladu (předpokládáme, že zadání je pravda) víme, že by mělo platit $|AS_1| = |C_1S_1| \wedge S_1 \in MN$ (Používám označení pro body stejné jako v obrázku 1). To proto, že AC je úhlopříčka S_1 je střed úhlopříčky a S_1 leží na MN . Jak vidíme, tak díky tomu, že C leží na k , tak AC tvoří tětivu k a v bodě S_1 bude nejen střed AC , ale kolmice z tohoto bodu bude procházet středem.

Tam, kde se protne thaletova kružnice s úsečkou MN vzniká bod S_1 a jak vidíme na obrázku, vzniká i bod S_2 . Poté už můžeme snadno najít i bod C . Všechny tyto útvary, které byly výše zmíněny jsou na obrázku zelenou barvou.

Z toho, že $AB_1C_1D_1$ je obdélník vyplývá, že mu musí jít opsat kružnice se středem S_1 . Nuže narýsujeme kružnici s daným středem a poloměrem. A potom, tam kde se protíná s kružnicí l vznikají průsečíky B_1 a D_1 . Vznikne tak úsečka B_1D_1 , jejíž střed leží v S_1 .

Rovněž nám také vznikl obdélník $AB_2C_2D_2$.

Také platí, že úhlopříčky AC a BD mají stejnou délku (z vlastností obdélníku). A zároveň jsou obě úhlopříčky tětivami kružnic. Tudíž obě tětivy jsou stejně dlouhé. A zároveň MN je také tětivou obou kružnic zároveň a má logicky pro obě kružnice stejnou délku (jedná se stále o jednu a tu samou úsečku). Tudíž, pokud pokud budeme pohybovat s S_1 po MN , mělo by stále platit, že $|AC| = |BD|$ a také $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$. To dokazuje, že nám vznikne, čtverec $ABCD$, z toho vyplývá, že střed S čtverce $ABCD$ leží na úsečce MN .

Interaktivní verzi obrázku 1 můžete odzkoušet na:

<https://tube.geogebra.org/m/uEiJA7fh>

7.3 M&M XXII. ročník; 2. série; 3. úloha

Potřebujete si rychle uvařit jídlo. Nemáte tlakový hrnec, pouze jednoduchý s pokličkou. Jaké maximální teploty v něm můžete dosáhnout, když mezi hrnec a pokličku dáte těsnění a na pokličku si sednete? Jak těžká (nebo zatížená) by musela být poklička, abyste v hrnci dosáhli stejné teploty jako v papiňáku? Sami odhadněte potřebné číselné parametry

Je jasné, že $F_t = F_g$ neboli, že síla jakou působí vzduch uvnitř hrnce na pokličku je stejná jako síla, kterou působí sedící člověk na pokličku. F_g můžeme spočítat jako $m \cdot g$. A nyní musíme spočítat jakým tlakem bude poklička působit na vzduch v hrnci (jaký tlak bude potřeba k tomu, aby poklička odlétla) tuto sílu spočítáme jako $p_g = \frac{F}{S} + 1 \text{ at}$. Neboli síla dělená plochou pokličky + tlak jedné atmosféry od okolního vzduchu.

Nyní musíme spočítat F_t (síla která působí zevnitř hrnce). Víme, že $F = pS$ a dále pro nás bude klíčový vzoreček:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

V našem případě víme, že objem bude zůstat stejný (dokud poklička neodletí s člověkem) nadále víme:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{at} = 1 \text{ at} \\ p_2 &= p_g \end{aligned}$$

Kde p_g už máme definovanou výše jako tlak, kterým působíme.

A T_1 bude pokojová teplota.

Nyní si vyjádříme T_2 :

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 V_1} \\ V_1 &= V_2 \\ T_2 &= \frac{p_2 T_1}{p_1} = \frac{(p_{at} + \frac{mg}{S}) T_1}{p_{at}} = \frac{p_{at} T_1 + \frac{T_1 mg}{S}}{p_{at}} = T_1 + \frac{T_1 mg}{p_{at} S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{at} &= 101\,325 \text{ Pa, } m = 70 \text{ kg; } g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; \\ S &= \pi r^2 \approx 0,03 \text{ m}^2 (r \approx 10 \text{ cm}); t_1 = 20^\circ\text{C}; T_1 = 293,15 \text{ K} \end{aligned}$$

Pokličku můžeme započítat do hmotnosti člověka (tato hodnota má takovou chybu, že zde můžeme zahrnout pokličku)

$$T_2 = T_1 + \frac{T_1 mg}{p_{at} S} = 293,15 + \frac{293,15 \cdot 70 \cdot 9,81}{101\,325 \cdot 0,03} \approx 229,3 \text{ K} \approx 86,2^\circ\text{C}$$

Tudíž vidíme, že nárůst teploty je $66,2^\circ\text{C}$. Také si můžeme všimnout toho, že změnu teploty můžeme spočítat jako: $\frac{T_1 mg}{p_{at} S}$.

Abychom však mohli vařit v papinově hrnci potřebovat však teplotu přibližně 120°C až 130°C ²¹, tudíž nárůst teploty bude muset být 100°C . Tudíž nyní známe T_2 a chceme vyjádřit m .

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + \frac{T_1 mg}{p_{at} S} \\ T_2 - T_1 &= \frac{T_1 mg}{p_{at} S} \\ (T_2 - T_1) p_{at} S &= T_1 mg \\ \frac{(T_2 - T_1) p_{at} S}{T_1 g} &= m \\ m &= \frac{(T_2 - T_1) p_{at} S}{T_1 g} \\ m_1 &= \frac{(393,15 - 293,15) \cdot 101\,325 \cdot 0,03}{293,15 \cdot 9,81} \approx 105,7 \text{ kg} \\ m_2 &= \frac{(403,15 - 293,15) \cdot 101\,325 \cdot 0,03}{293,15 \cdot 9,81} \approx 116,3 \text{ kg} \end{aligned}$$

Nejprve zde máme výsledek pro výslednou teplotu 120° a pak pro 130° . Takže závěrem by mohlo být, že když jsme trochu při těle, tak ani nepotřebujeme papíňák :-D

²¹zdroj: wikipedia

7.4 M&M XXII. ročník; 2. série; 4. úloha

Někdo vám zavázal oči a postavil vás před čtvercový podnos, na kterém je v každém rohu jedna mince. Můžete otočit libovolné z těchto mincí a dát ruce pryč. Pokud pak budou všechny lícem nahoru, splnili jste úkol; v opačném případě se podnosem otočí o neznámý počet čtvrtotáček a začne se od začátku. Nedokážete zjistit hmatem, která strana mince je která. Jak to provedete, pokud nechcete spoléhat na náhodu?

Pokud budeme každý tah otáčet stejný počet mincí, tak určitě nemohu neotočit žádnou nebo všechny. Také nemohu otáčet dvě, jelikož, pokud by nejprve byl počet mincí otočených lícem nahoru lichý, nikdy bych nemohl docílit toho, aby byl 4 (4 je sudé číslo). Tudíž budeme vždy otáčet 1 nebo 3 mince.

Pokud, se stolek otočil, měli jsme špatně 1 až 4 mince. Tudíž správně 0 až 3 mincí. A my buďto budeme "opravovat" 1 až 3 mince. Podle mě, pokud bychom otáčeli 3 mince, tak je moc velké riziko, že vždy když se budeme blížit, tak často otočíme nějakou správnou. Na druhou stranu to samé se může stát i když otáčíme jen jednu. Na konec pokud budeme z našeho pohledu otáčet mince na stejných místech, je vždy pouze 1 vítězná konfigurace.

Jinak pokud je počet otáček stolu čistě náhodný a každé otočení má stejnou pravděpodobnost, je podle mě méně pravděpodobné, že se stůl otočí 2× za sebou do stejné polohy a dále nechceme otáčet stále tu samou minci a aby se tedy toto stávalo s co nejmenší pravděpodobností, měl bych asi otáčet minci, co bude ke mě vždy co nejbližší.

Pokud bych tedy chtěl svoji pravděpodobnost, co nejvíce vylepšit, vybral bych si jedno místo a v každém kole obracel minci na tomto místě.

7.5 M&M XXII. ročník; 2. série; 5. úloha

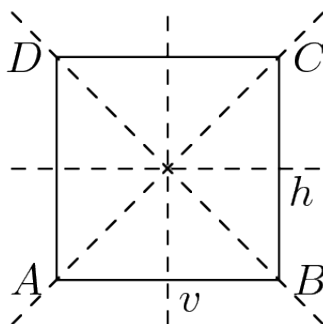
1. Uved' nějakou další množinu, která může vytvořit grupu s operací sčítání. (1b)
2. Vymysli si nějakou grupu a ukaž, že je to grupa. (1 – 3b podle složitosti a originality grupy)
3. Sestav grupu všech symetrií rovnostranného trojúhelníku v rovině a analyzuj ji. (3b)

1) Racionální čísla $(\mathbb{Q}, +)$

Součet dvou libovolných racionálních čísel je opět racionální číslo. Sčítání racionálních čísel je asociativní. Jednotkový prvek je 0. Inverzní prvek je vždy číslo číslo s opačným znaménkem.

2) Grupa zrcadlení a rotací ve čtverci

Máme čtverec $ABCD$ se středem S a osami h ; v ; AC a BD , viz obrázek:



A máme 9 operací: e ; σ_S ; σ_S^2 ; σ_S^3 ; σ_S ; σ_h ; σ_v ; σ_{AC} ; σ_{BD} . Operaci otočení σ_S bereme jako otočení po směru hodinových ručiček o 90° , tak získáváme σ_S ; σ_S^2 a σ_S^3 . Poté máme zrcadlení přes střed S (σ_S), přes osu h (σ_h), přes osu v (σ_v), přes osu AC (σ_{AC}) a přes osu BD (σ_{BD}).

2.1) Grupa je uzavřená:

	e	σ_S	σ_S^2	σ_S^3	σ_S	σ_h	σ_v	σ_{AC}	σ_{BD}
e	e	σ_S	σ_S^2	σ_S^3	σ_S	σ_h	σ_v	σ_{AC}	σ_{BD}
σ_S	σ_S	σ_S^2	σ_S^3	e	σ_S^3	σ_{BD}	σ_{AC}	σ_h	σ_v
σ_S^2	σ_S^2	σ_S^3	e	σ_S	e	σ_v	σ_h	σ_{BD}	σ_{AC}
σ_S^3	σ_S^3	e	σ_S	σ_S^2	σ_S	σ_{AC}	σ_{BD}	σ_v	σ_h
σ_S	σ_S	σ_S^3	e	σ_S	e	σ_v	σ_h	σ_{BD}	σ_{AC}
σ_h	σ_h	σ_{BD}	σ_v	σ_{AC}	σ_v	e	σ_S	σ_S^3	σ_S
σ_v	σ_v	σ_{AC}	σ_h	σ_{BD}	σ_h	σ_S	e	σ_S	σ_S^3
σ_{AC}	σ_{AC}	σ_h	σ_{BD}	σ_v	σ_{BD}	σ_S^3	σ_S	e	σ_S^2
σ_{BD}	σ_{BD}	σ_v	σ_{AC}	σ_h	σ_{AC}	σ_S	σ_S^3	σ_S^2	e

Tabulka 11: Grupa zrcadlení a rotací ve čtverci

Určitě stojí za to všimnout si, že σ_S^2 je to samé jako σ_S .

2.2) Asociativitu můžeme ověřit z tabulky výše. Operace jsou navíc komutativní.

2.3) Jednotkový prvek je e (nic neděláme).

2.4) Každý prvek má inverzní (za všimnutí stojí, že někdy jich je i více a to u o_S^2 a σ_S , což je vlastně ta samá operace) a je to vždy ten, který s ním dá dohromady e (většinou je to on sám (až na o_S a o_S^3)).

3) Grupa symetrie rovnostranného trojúhelníku v rovině

Celkem budeme mít $3! = 6$ operací. První, co nás napadne je identita e . Dále pak rotaci kolem trojčetné osy (o 120°), řekněme po směru hodinových ručiček. Aplikováním otočením o 120° se dostaneme do o_S , dalším otočením do o_S^2 a třetím do původního stavu e .

dále tu máme operaci zrcadlení, která bude zrcadlit trojúhelník podél osy, spojující bod a střed protilehlé strany. Výsledkem bude, že nám vymění 2 body ležící proti bodu, kterým prochází osa. Tudíž σ_A nám vymění body B a C (pokud jsme ve výchozím stavu). Máme tedy 6 prvků: e ; o_S ; o_S^2 ; σ_A ; σ_B a σ_C . Nyní pomocí multiplikativní tabulky ověříme uzavřenost grupy:

	e	o_S	o_S^2	σ_A	σ_B	σ_C
e	e	o_S	o_S^2	σ_A	σ_B	σ_C
o_S	o_S	o_S^2	e	σ_C	σ_A	σ_B
o_S^2	o_S^2	e	o_S	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_B	σ_C	e	o_S	o_S^2
σ_B	σ_B	σ_C	σ_A	o_S^2	e	o_S
σ_C	σ_C	σ_A	σ_B	o_S	o_S^2	e

Tabulka 12: Multiplikativní tabulka grupy rovnostranného trojúhelníku

Jak vidíme v multiplikativní tabulce výše, grupa je uzavřená, rotace a rotace dají dohromady logicky rotaci. Tabulka ale není zcela souměrná, tudíž operace rotace a zrcadlení nejsou komutativní. Pokud kombinujeme zrcadlení a rotaci dostáváme zrcadlení.

Pokud kombinujeme dvě zrcadlení dostáváme rotaci. Všimněme si, že pokud řekneme, že písmena A,B,C mají pořadí a podíváme se horní pravé poloviny v případě, že nejprve aplikujeme otočení o_S pořadí indexů výsledným zrcadlení se mění z A ; B ; C na C ; A ; B . A pokud dvojnásobné otočení o_S^2 , tak na B ; C ; A . Písmena tedy postupují vždy o jeden index dopředu.

Pokud nejprve aplikujeme zrcadlení a poté otočení indexy se z $A; B; C$ při otočení o_S mění na $B; C; A$ a při o_S^2 na $C; A; B$. Písmena tedy postupují vždy o jeden index dozadu.

Podobná závislost by se dala vysledovat i o rotací: u skládání otočení se vždy celý řetězec posune o 1 dozadu. U skládání zrcadlení vždy o 1 dopředu.

8 M&M XXII. ročník 3. série

8.1 M&M XXII. ročník; 3. série; 1. úloha

Rozhodněte, jestli pro libovolných 101 přirozených čísel menších nebo rovných 200 lze vždy vybrat 2 čísla tak, aby jedno dělilo druhé.

Úlohu budeme nejprve řešit sporem: Předpokládejme, že existuje případ, kdy 101 čísel menších nebo rovno 200 mezi sebou nemá dvojici, která by se dělila.

První, co nás může napadnout je, že vezmeme prvočísla (všechna do 200). Těch je ale málo, ani ne 50 a když teď vezmeme jakékoliv číslo, tak ho z těch prvočísel můžeme poskládat (násobením), tudíž tudy cesta nepovede.

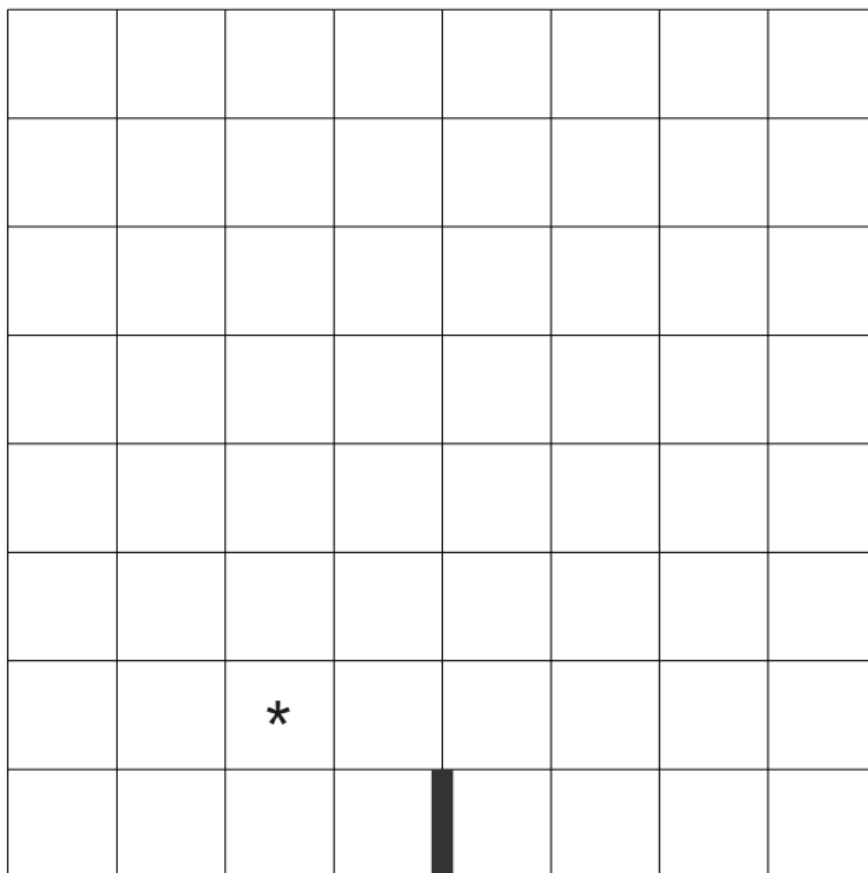
A co když vezmeme 101 největších čísel (toto mě napadlo při pohledu na to, že zbyla hlavně sudá čísla, která mají společného dělitele 2). Máme tedy 100 až 200. S 99 čísly jsme spokojení, ale ne s 100 a 200. Tak co to zkusit mírně upravit, tak 100 na 99, ale pak máme konflikt se 198 a pro 98 s 196. A u 66 už máme konflikt s 132 a 198. Co kdybychom zkusili vyřešit konflikt odebráním 200, ale co potom? Pokud přidáme 99, pak musíme odebrat 198 a poté přidáme 98, kvůli tomu ale musíme odebrat 196 a dostáváme se do hodně podobné situace té první.

Problém je v tom, že čísel je více než polovina, pokud by jich byla polovina a méně tak už by to šlo a pokusím se vysvětlit proč. Důležitou roli zde hraje číslo 2 (přesněji prvočísla). A čísla jdou zapsat jako násobky: druhé, třetí... A pokud chceme nějakou skupinu, kde se nebudou vyskytovat druhé násobky. A jelikož se chceme vyhnout druhým násobkům, tak z toho vyplývá, že pokud máme nějakou nepřerušovanou řadu, tak se můžeme tímto způsobem zajímat maximálně o polovinu prvků ale ne o 101 z 200, jelikož nemůžeme najít 101 čísel, aby mezi sebou neměla čísla nežádoucí vztah.

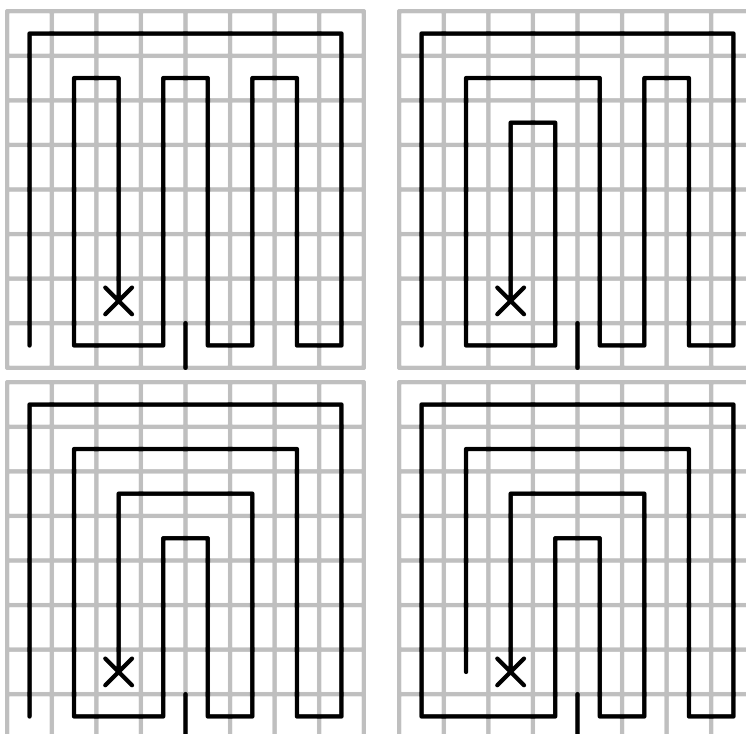
Z toho vyplývá, že náš předpoklad byl mylný, tudíž mezi 101 čísly do 200 lze vždy vybrat 2 čísla, aby jedno dělilo druhé.

8.2 M&M XXII. ročník; 3. série; 2. úloha

Stojíš ve čtverci 8×8 na místě vyznačeném hvězdičkou (viz obrázek vpravo), tvým úkolem je projít všechna políčka ve čtverci tak, aby tvou trajektorii tvořilo 15 úseček, které se vzájemně nekříží. Po čtverci se můžeš pohybovat jen vodorovně či svisle a pohyb ti ztěžuje nepřekonatelná zed'.

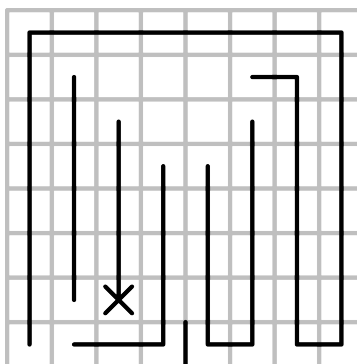


Když si tuto úlohu zkusíme experimentálně, tak zjistíme, že 15 čar je opravdu málo, tudíž s nimi nemůžeme plýtvat. Hned na první pohled vidíme, že velký problém nám způsobuje startovní pozice, jelikož zde se dá ztratit opravdu mnoho čar. Když půjdeme nejprve doprava, tak se pak nabízí jít dále napravo nebo dolů, ať půjdeme jakkoliv, vytvoří zub nebo zářez a kvůli nim nám to nevydává. Když půjdeme dolů, můžeme jít doprava nebo doleva. Když půjdeme doprava vznikne zub. Když doleva, tak můžeme jít potom nahoru nebo ještě o jeden doleva a pak nahoru. Ať půjdeme jakkoliv, tak nám vznikne zub. To co musíme udělat je to, že musíme někdy startovací pole obkroužit a to zespoda (kvůli stěně). Musíme tedy nahoru a poté máme na vybranou jestli doprava nebo doleva (jestli doleva tak jedeme až na předposlední políčko, jestli doprava na předpředposlední políčko). Poté dojedeme dolů, obkroužíme startovací políčko a dotáhneme čáru tak, aby jsme vyplnili všechny políčka až na nejhornější v 2. až 4. sloupci. Poté přejdeme na druhou polovinu, tu můžeme lehce vyplnit takovým hadem (viz. obrázky). A poté se vrchem vrátíme zpět ke startu. Celou cestu popisují obrázky níže:

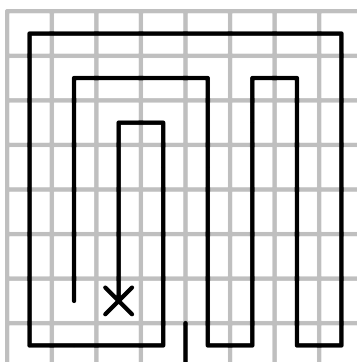


A další varianty vznikly omylem a pokusem "obkroužit" i políčko vedle

startovního. Můžeme si všimnout, že někde jsou čáry, které se vždy používají, tudíž si je označme jako klíčové:



Pak můžeme ještě najít (kombinatoricky) toto řešení:



8.3 M&M XXII. ročník; 3. série; 3. úloha

Ve městě je obdélníkový park a tímto parkem teče potůček. Po obou březích vedou chodníčky, ale nikde v parku přes potůček nevede most. Oba chodníčky vedou stále právě 2,5 m daleko od středu potůčku. Potůček do parku vtéká na východě (kolmo na okraj parku), v parku se nějak klikatí a poté vytéká směrem na sever (opět kolmo na okraj parku). Klikatění potůčku dostanete na vstupu jako posloupnost rovných úseků (popsaných jejich délkou) a zatáček (popsaných poloměrem zakřivení potůčku a úhlem, o který je potůček zakřiven – kladné číslo představuje zatáčku doprava, záporné doleva). Napište program nebo popište algoritmus s co nejmenší časovou složitostí, který vypíše, po kterém břehu a o kolik metrů je cesta podél potůčku kratší. Můžete předpokládat, že trasa potůčku v parku je „rozumná“, tedy potůček:

- *nikdy neprotíná sám sebe ani se nepřibližuje sám k sobě na méně než 5 m*
- *nikdy neopisuje oblouk s poloměrem menším než 2,5 m*
- *se nikde mimo začátek a konec svého průtoku parkem nepřibližuje na méně než 2,5 m k okraji parku*

Na začátek si můžeme všimnout, že pokud chceme vědět pouze o kolik je cesta delší nebo kratší, nemusíme počítat s rovnými úseky. Jelikož na těchto rovných úsecích je délka obou chodníků stejná.

A dále řekněme, že zatáčka má poloměr r a úhel zatáčka je α (zatím nerozlišujeme na kterou stranu zatáčka je). Cestu po bližším chodníčku je $\frac{(r-2,5)\cdot 2\pi}{360} \cdot \alpha$ a po delším chodníčku pak: $\frac{(r+2,5)\cdot 2\pi}{360} \cdot \alpha$. Rozdíl vzdáleností je: $\frac{(r+2,5)\cdot 2\pi}{360} \cdot \alpha - \frac{(r-2,5)\cdot 2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{(r+2,5)\cdot 2\pi - (r-2,5)\cdot 2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{(r+2,5-r+2,5)\cdot 2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{5\cdot 2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi}{36} \cdot \alpha$. A jak vidíme, tak nám vypadl poloměr r . Z toho můžeme říci, že pokud je zatáčka doprava, tak cesta po levém chodníčku bude o $\frac{\pi}{36} \cdot \alpha$ delší. A pokud doleva tak o $\frac{\pi}{36} \cdot \alpha$ kratší. Ze zadání máme slíbeno, že potůček se nekříží, tudíž výsledné zahnutí bude o 90° doleva. Z toho vidíme, že cesta bude vždy kratší po levém břehu a to o $\frac{\pi}{36} \cdot 90 = \frac{5}{2}\pi$.

Tudíž algoritmus programu by měl vypadat přibližně takto:

```
{
Vypiš:
"Cesta je kratší po levém břehu o  $\frac{5}{2}\pi$  m"
}
```

Programovat moc neumím, ale využil jsem internetových služeb, tudíž pod tímto odkazem by se snad měl skrývat chtěný program:

<http://cpp.sh/85rh>.

Jinak program (v Ecelu), který spočítá délku obou břehů jsem též vytvořil a je ke stažení na <http://ulozto.cz/x51Tg4Q6/22-03-03-02-xlsx>. Lze zde ozkoušet, zda je to opravdu pravda.

8.4 M&M XXII. ročník; 3. série; 4. úloha

Změřte rychlost padání deště (případně sněhu). Padají všechny kapky (vločky) stejně rychle? Na základě změřené hodnoty odhadněte velikost kapek.

U toho experimentu velmi záleží na vnějších podmínkách a proto jsem se rozhodl, že nejprve sepíši, na co si vlastně při měření musíme dávat pozor.

1) Vítr

Když padá sníh tak i často fouká vítr, a to mám rychlost sněhu často velmi měnit, pokud fouká silný vítr (extrémní), sníh se pohybuje klidně i rychlostí několik desítek metrů za sekundu. Tudíž my musíme udělat to, že budeme měřit pouze vertikální složku rychlosti (a ideálně v bezvětří).

2) Turbulence

Další efekt na který si musíme dávat pozor jsou turbulence, určitě se každému stalo, že když se kukal z okna a sníh padal pomalu a foukl vítr, tak se stalo, že vítr změnil svoji rychlost a možná začal dokonce na chvíli stoupat. Proto jsem si nejprve myslel, že bude nejlepší provádět experiment v odkrytém prostranství bez překážek.

3) Správné vzdálenosti a pozice nás, měřidla a vločky

Během toho, co jsem prováděl první experimenty jsem však zjistil, že pokud si vezmeme pouze nějakou tyč (tyč nebude vyvolávat turbulence) a budeme měřit čas, za jaký vločka spadne o délku této tyče, tak nebudeme schopni určit v jaké vzdálenosti se vločka nachází, jelikož pokud stojíme 2 metry od tyče, tak nejsme často schopni určit jestli je vločka ve vzdálenosti tyče nebo 0,5 metru za ní, což bude mít velký vliv. Tudíž poté jsem se rozhodl, že si najdu nějakou vhodnou překážku (v mém případě to byly staré husté chvojky zastřižené do tvaru kvádrů). Tuto překážku jsem použil jako pozadí a dále pak neměli minimální vliv jelikož (skoro) nefoukal vítr.

Dále musíme vymyslet, jak to vlastně celé provedeme, když si vezmeme do ruky stopky, tak to není zrovna nejlehčí úkol, jelikož musíme celou dobu udržet zrak na jedné vločce, což pokud jste slepí jako já tak to není vůbec lehké. A dále je také důležité správně stopovat a mít dobré reakce, což nemám. A v neposlední řadě zde máme přibližně 0,2 s chybu kvůli reakcím. Proto jsem vymyslel lepší způsob a to, že vše natočím a poté na počítači určím jak dlouho to trvalo, než vločka spadla. Má to tu výhodu, že zde můžu jednodušeji vybírat data, která chci a není mi při tom zima. Musím si ale dávat pozor, abych se soustředil na vločky u chvojek a abych neměřil ty blíže objektivu, proto se budu snažit najít ty nejpomalejší vločky, jelikož to jsou ty nejvzdálenější (ty nejblíže chvojkám - ty co měříme). Nakonec video zpracuji

v nějakém softwaru a zjistím kolik snímků trvalo vločce spadnout. Rozhodl jsem se změřit 20 vloček, jelikož 10 se mi zdálo málo. Rychlost pádu jsem měřil pomocí doby pádu po vzdálenost 2 m (vertikálně). Pustil jsem se tedy do měření a získal jsem následující hodnoty:

i	$\frac{n}{\text{snímky}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$	$\frac{\Delta v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$
1	83	3,32	0,60	0,03
2	80	3,20	0,63	0,05
3	93	3,72	0,54	-0,04
4	92	3,68	0,54	-0,03
5	85	3,40	0,59	0,01
6	92	3,68	0,54	-0,03
7	84	3,36	0,60	0,02
8	81	3,24	0,62	0,04
9	94	3,76	0,53	-0,04
10	82	3,28	0,61	0,03
11	94	3,76	0,53	-0,04
12	91	3,64	0,55	-0,03
13	91	3,64	0,55	-0,03
14	88	3,52	0,57	-0,01
15	78	3,12	0,64	0,06
16	93	3,72	0,54	-0,04
17	80	3,20	0,63	0,05
18	93	3,72	0,54	-0,04
19	88	3,52	0,57	-0,01
20	80	3,20	0,63	0,05
Σ			11,53	0,68
ϕ			0,58	0,03

Tabulka 13: Tabulka naměřených hodnot

Rychlost padání sněhu byla $v = (0,58 \pm 0,03) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Relativní chyba je $\frac{0,03}{0,58} = 0,059$. Točil jsem 25 snímků za sekundu, tudíž 1 snímek trval 0,04 s. Navíc snímek má nějakou dobu expozice. Proto si myslím, že chyba měření začátku a konce pádu byla v obou případech 0,03 s. Průměrný čas byl 3,48 s, tudíž relativní chyba měření je $2 \cdot \frac{0,03}{3,48} = 0,017$. Celková chyba je tedy $0,076 = 7,6 \%$.

Závěr

Nakonec si shrneme fakta a fyzikální zákony, které jsou pro nás důležité. Nejprve víme, že tíhová síla F_t musí být rovna odporové síle F_o . Můžeme tedy říci:

$$F_t = m \cdot g \quad (12)$$

$$F_o = C_x \frac{1}{2} \varrho v^2 S \quad (13)$$

$$F_o = F_t \quad (14)$$

$$F_o = C_x \frac{1}{2} \varrho v^2 S = F_t = m \cdot g \quad (15)$$

Kde F_o je odporová síla, C_x je součinitel odporu, ϱ je hustota prostředí, v je rychlost padajícího objektu a S je plocha objektu. Dále pak m je hmotnost padajícího objektu a g je tíhové zrychlení.

Určitě ještě stojí za zmínku, že záleží na tvaru a velikosti vložky a s tím spojené hmotnosti. Na tvaru vložky totiž toho záleží mnoho, jsou tvary které budou mít menší plochu při větší hmotnosti a naopak. A tvar vložky je závislý na mnoha aspektech. A bude těžké odhadnout parametry tak, aby nám vyšly nějaké reálné hodnoty. Podle internetu²² se pohybuje hmotnost vložky okolo $3 \cdot 10^{-6}$ kg. C_x se pro rovnou tenkou desku pohybuje kolem 1,2 a toto popisuje sněhovou vložku asi nejlépe. Hustota vzduchu je přibližně $\varrho_{vzduch} = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Rychlost jsme právě změřili jako $v = 0,58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dosadíme tedy tyto hodnoty do vzorce:

²²<http://hypertextbook.com/facts/2001/JudyMoy.shtml>

$$C_x \frac{1}{2} \varrho v^2 S = m \cdot g \quad (16)$$

$$S = \frac{2mg}{C_x \varrho v^2} \quad (17)$$

$$S = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81}{1,2 \cdot 1,29 \cdot 0,58^2} \approx 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (18)$$

Vychází nám tedy, že jedna vločka měla plochu přibližně 1 cm^2 , a tudíž i přibližně 1 cm v průměru, což podle mě, by ani nemusel být daleko do pravdy, takže naše chyba nemusí být až tak velká (na to kolik odhadů jsme udělali), celkovou chybu (součet všech chyb) bych nakonec odhadl na 25% .

8.5 M&M XXII. ročník; 3. série; 5. úloha

- 1. Urči řád grupy a jejích prvků a najdi co nejvíc podgrup a všechny třídy grupy D_{3h} . (2b)*
- 2. Napiš nějakou 3D reprezentaci grupy všech dvojčetných rotací rovnostranného trojúhelníka a rozhodni, jestli je ireducibilní. (4b)*

1) Nejprve řády prvků:

$$e - 1;$$

$$c_3 - 3; c_3^2 - 3;$$

$$s_3 - 3; s_3^2 - 3;$$

$$\sigma_h - 2;$$

$$\sigma_A - 2; \sigma_B - 2; \sigma_C - 2;$$

$$c_A - 2; c_B - 2; c_C - 2;$$

Podgrupy:

$$1) e;$$

$$2) e, c_3, c_3^2;$$

$$3) e, c_3, c_3^2, s_3, s_3^2, \sigma_h;$$

$$4) e, c_3, c_3^2, c_A, c_B, c_C;$$

$$5) e, c_3, c_3^2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C;$$

Třídy:

$$1) e;$$

$$2) c_3, c_3^2, s_3, s_3^2;$$

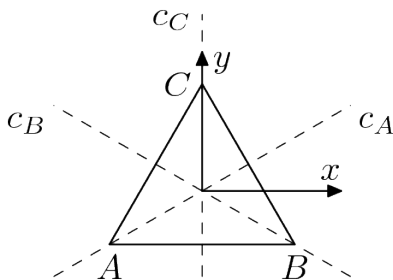
$$3) \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, c_A, c_B, c_C$$

4) σ_h % vycházelo mi, že σ_h je konjugovaná sama se sebou a s identitou, identita je ale samostatná třída a navíc to je v pořádku jelikož po aplikování σ_h jsme na venek ve stejném stavu jako na začátku. Tudíž to je rovněž samostatná třída.

Když se podíváme na počet prvků tříd, tak vidíme že jich je 1, 4, 6, 1, což jsou dělitelé 12.

2) Nikdy jsem s maticemi nepočítal, tak doufám, že to nebude naprostá katastrofa. . .

Náčrtek:



Jednotková matice je (jak víme):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejprve si musíme vypsát matice, které provedou dvojčetné rotace:

V prvním případě c_C je to jednoduché, je to rotace kolem osy x , takže rovnou můžeme napsat, že matice této rotace je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Další rotace však už ale budou náročnější. Vezmeme si jednotlivé vektory ve směru os $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ a budeme pátrat, kam se otočily. Pokračujme s c_B . Osa x bude o 30° otočena do $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 . Osa y svírá s osou rotace 120° tudíž bude otočena do $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 . Osa z bude otočena na: $0, 0, -1$, vznikne nám tedy následující matice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maticovým skalárním součinem můžeme ověřit správnost výpočtu (vyjde jednotková matice).

Obdobně nakonec spočítáme i c_A . Osa x na půjde na $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 . Osa y na $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0 . Osa z na 0 ; 0 ; -1 . Dostaneme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opět můžeme ověřit maticovým skalárním správnost výpočtu (vyjde jednotková matice).

Reprezentace grupy všech dvojčetných rotací tedy může vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A nyní zjistíme jestli je reprezentace ireducibilní nebo ne:

$$\sum_R |x_a(R)|^2 = g. \quad (19)$$

$$x_e(3) = 3, x_C(3) = -1, x_B(3) = -1, x_A(3) = -1 \quad (20)$$

$$3^2 + |-1|^2 + |-1|^2 + |-1|^2 = 9 + 1 + 1 + 1 = 12 = 12. \quad (21)$$

Reprezentace grupy všech dvojčetných rotací rovnostranného trojúhelníku tedy ireducibilní je.

9 M&M XXII. ročník 4. série

9.1 M&M XXII. ročník; 4. série; 1. úloha

Vaším úkolem je dešifrovat následující vzkaz ve finštině (text byl před zašifrováním zbaven diakritiky, takže používá pouze anglickou abecedu). Je to substituční šifra. Úkolem není nalézt český překlad, ale možná za něj bodík navíc bude. Cbfb wjxxjj ysfnthuvbutuz vs guxxs bz znxxs ystss. Wngsxxs cbfbh gpbksh nzuyyswgnnz wbukjz xnthus, vswsxxs, tnuzss vs fjbtbs, yjhhs ynhguggs zn kbuksh wsphhss ypbg ybzucjbxugnycss fskuzhbs, wjhnz gjbysuinz fsshnhhs vs xjbzzbzzuuhhpnz wsgknvs. Gpwgpxs cbfbh wnfssksh ksfsfskuzhbs hxxkns ksfhnz gpbysxxs gunzus, vswsxxs vs tnuzunz xugswgu. Hxxknxxs, wjz fskuzhbs bz xjbzzbggs kstnyysz, cbfbh nhguksh nzguguvugngghu vswsxxs. Cbfb cpghppwuz tsughsyssz vswsxxs ynhfuz cswgjugnz tszrnz xscu. Ypbg tnuzswgkuh vs ksfkjh wnxcssksh cbfbvz fskuzzbwgu, vbg vswsxxs nu bxn hsfennwgu gsshskuxs. Vswsxughs cbfb gjbguu csxxnfbcbfzvswsxxs. Cbfbz fjjszgjxshjg pwguzwnfhsughjj hxxknxxs vs cbhguz ynfwhpg bz nfuhhsuz kstsuznz. Cbfb yjughjhhs hxxkuguz pwguystsughs nxsuzhs vs hxxku ynfwhgnn cbfbxxn xsuthjyughs vs vbcsksuz tnzrugsgbzkusyughs. Cbfb ynznhhss hxxknxxs zbfysxughuwuz zbuz kuuinzznwnz csuzbghssz. Zwpuguz pxnughpzph xugsfjwuzhs bz yjjhhszjh huxsznhhs ynfwhhsksghu.

Nejlepší bylo si k tomu pustit "Evinu Polku"²³ Po 2 hodinách už to byl totální haluz :-D Všem doporučuji :-D

Nejprve jsem zkoušel jestli se nejedná o Caesarovu šifru, (každé písmeno je posunuto 2 n míst dopředu nebo dozadu), poté jsem zkoušel otočit abecedu a opět jí posouvat, ani jedno z toho nevyhodnotil Google překladač jako finštinu, takže to asi nebyla správná cesta. Poté mě napadlo, že bych si alespoň mohl najít četnost jednotlivých písmen ve Finštině a porovnat je s naším textem²⁴. Nahradit písmena podle jejich četnosti nezabralo, ale alespoň mám tušení která písmena by přibližně měla být nahrazena kterými.

Poté jsem se pokoušel odrazit od krátkých slov (v závorce výskyt) (vs (18×), bz (10×), nu (5×), zn (6×)), a od nejčtetnějších krátkých slov (ja, se, ei, ne,...) ale neúspěšně, také jsem si všiml, že se zde často opakuje slovo "Cbfb" na začátku věty, jednou s příponou "z", jeho význam mi však rovněž zůstal skrytý. Když už jsme u četnosti, tak nejčtetnějším slovem finštiny je "olla", žádné slovo o 4 písmenech s prostředními písmeny stejnými se v našem textu nevyskytuje.

Dále jsem si zjistil, že ve finštině se nevyskytuje g, b, f, c, w, z, x. V našem textu se zase nevyskytují a, d, e, l, m, o, q. Dále, že se zde všechny hlásky vyskytují v podvojně formě až na v, j, d. Ale v našem textu mají podvojnou formu jen g (3×), h (10×), j (5×), n (3×), p (1×), s (17×), u (3×), x (10×), y (2×), z (6×).

Také jsem to zadával na stránku <http://quipqiup.com/index.php>, což je stránka specializovaná na šifry, ale bezvýsledně.

Řešení jsem nenalezl, ale doufám, že bych mohl alespoň dostat nějakou desetinku za určení toho, co řešením není.

Nejčtetnější slova (1000+): www.city.fi/blogit/lavas/suomen+kielen+yleisimmat+sanat/127154

²³<https://youtu.be/4om1rQKPjI>

²⁴Už od začátku jsem hned řešil tak, že jsem si to v Excelu rozebral na znaky a poté jsem jen psal které znaky mají být nahrazeny kterými a poté jsem jen už kopíroval vzniklý text do Google překladače.

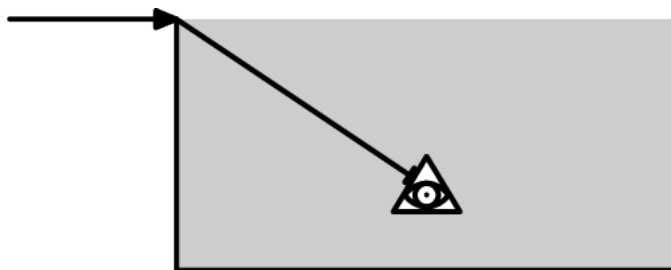
Fisko-anglický slovník: www.hs.fi/ nebo <https://translate.google.cz/?hl=cs&tab=wT>

Můj Excel soubor, kde stačí pouze zadat co čím nahradit a vyleze výsledek + frekvenční analýza textu – vyřadil jsem tedy několik písmen a je zde ± 17 písmen, na kterých nám skutečně záleží, stále je to ale matematicky přibližně $17!$ možností: <http://ulozto.cz/xYJ4rVNx/22-04-06-xlsx>.

9.2 M&M XXII. ročník; 4. série; 2. úloha

Máme zapuštěný bazén kruhového půdorysu o poloměru R (index lomu vody n_2 , index lomu vzduchu n_1). Do jaké maximální hloubky se může potopit plavec, aby ve světelném kruhu nad sebou teoreticky viděl celý prostor nad hladinou? (Uvažujme zcela rovnou vodní hladinu.)

Abychom viděli celý prostor nad námi a zároveň se mohli ponořit do co největší hloubky, tak se musíme nacházet uprostřed bazénu. Dále si provedeme mírné zjednodušení a to, že i když je paprsek rovnoběžný s hladinou, tak se najednou (z ničeho nic normálně sám :-D) dokáže dotknout hladiny a zlomí se pod hladinu, díky tomu budeme schopni pozorovat povrch, ale zároveň se paprsek bude odrážet co nejvíce dolů a budeme počítat s paprsky, co se odrazí už hned na hraně bazénu, aby stihli klesnou do co největší hloubky.



Víme, že $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$. My známe n_2 (index lomu vody (1,33)) a n_1 (index lomu vzduchu (1,000 26)).

V tomto případě bude $\alpha = 90^\circ$. $\sin \beta$ se pak spočítá jako:

$$\sin \beta = \sin \alpha \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (22)$$

Tento úhel jsme tedy schopni snadno dopočítat ($51^\circ 4' 4''$). Z toho si už můžeme podle znalosti všech úhlů v pravoúhlém trojúhelníku a 1 strany dopočítat hloubku. Tu si můžeme vyjádřit jako: $\tan \beta = \frac{R}{h}$.

$$h = \frac{R}{\tan \beta} = \frac{R}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{R}{\frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - (\sin \beta)^2}}} = \frac{R}{\frac{\frac{n_1}{n_2}}{\sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2})^2}}} = \frac{R \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2})^2}}{\frac{n_1}{n_2}} \quad (23)$$

$$h = \frac{R \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}}}{\frac{n_1}{n_2}} = \frac{R \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2}}}{\frac{n_1}{n_2}} = \frac{R \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}{n_2}}{\frac{n_1}{n_2}} = R \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}{n_1} \quad (24)$$

Výsledný vzoreček tedy je $h = R \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}{n_1}$, což je pro reálné hodnoty přibližně: $0,876R$.

9.3 M&M XXII. ročník; 4. série; 3. úloha

Na stole je pevně umístěno 2016 svíček. Dva hráči hrají následující hru. V každém tahu hráč rozsvítí nebo zhasne jednu ze svíček, ale nesmí to provést tak, aby se rozsvícené svíčky ocitly ve stejném rozestavení, jako už někdy dříve ve hře. Hráči se střídají v tazích a prohrává ten hráč, který už nemůže provést tah. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Jedná se pokud jsou všechny svíčky zhasnuté o rozestavění rozsvícených svíček?

Pokud ne, tak je to velmi prosté, hráč číslo 2 nechá pouze postupně rozsvěcet svíčky, načež mu je zhasne až do té chvíle dokud nevyčerpají všechny svíčky. V tomto případě vyhrál hráč číslo 2 nezávisle na hráči číslo 1.

Toto asi není myšlené řešení, ale jen mě to napadlo, když jsem četl zadání a nebyl si na 100% jistý.

V druhém případě, už se 2. hráč nemůže vracet do původního stavu (když jsou všechny svíčky zhasnuté, tak se též jedná o rozestavění). Začneme s jednou svíčkou. První hráč jí rozsvítí a druhý prohrál!

A co 2 svíčky, nejprve 1. hráč rozsvítí 1. svíčku. Poté druhý hráč musí buďto zhasnou 1. svíčku nebo rozsvítit druhou, musí však rozsvítit druhou, protože zhaslé už byly. První hráč pak musí zhasnou 1. svíčku, protože v rozestavění, že první svítila a druhá byla zhaslá už byly. Hráč č. 2 prohrál.

Poté jsem si prošel hry a něco mě napadlo, budeme nyní hráč č. 1 (začínající). A pro zjednodušení řekněme, že jsou všechny zhasnuté (výsledek hry na tom nezáleží, ale bude se to lépe představovat). Nyní zapálíme 1. svíčku. Druhý hráč musí zapálit jinou svíčku, třeba 2. (je jedno jestli 2. nebo 7., pro jednoduchost půjdeme popořadě). My pak zhasneme 1. svíčku, druhý hráč poté musí rozsvítit 3. svíčku, my mu pak zhasneme 2. svíčku, on musí rozsvítit 1. nebo 4. svíčku. A zde bychom měli poměrně dost možností, co mohou oba dělat.

Vždy máme 2^n možností a vždy můžeme projít všechny možnosti (je jich sudý počet, vyhrává hráč č. 1 (máme ještě 1. stav který nevznikne tahem nikoho (proto vyhrává 1 a ne 2))).

Nejsem si úplně jistý pokud bude 1. hráč hrát racionálně, tak by vždy hra měla mít sudý počet tahů a poslední tah (to co zbude po posledním tahu 1. hráče) bude mít lichý počet zapálených svíček.

Zkoušel jsem si nějaké hry a pokud hrál hráč č. 1 racionálně, tak existovalo dokonce několik cest jak vyhrát. Nikdy ale nevyhrával 2. hráč.

A nebo si můžeme říci, že pokud máme 1 svíčku, tak hráč 1 se nachází ve vítězné pozici, pokud máme 2, tak to jsou pouze 2 první případy – svíčka a svíčka. Pokud máme 3, tak je to předešlý příklad a jedna svíčka navíc (Máme tedy jednu hru o dvou svíčkách s 3. zhasnutou a další o 3 svíčkách s třetí rozsvícenou (máme tedy jakoby 2 hry o 3 svíčkách)). Všechny tyto hry jsou tedy logicky vyhrané, stejnou logiku můžeme aplikovat dále. Pro 4 svíčky vlastně máme 2 hry o třech svíčkách a pro pro 5 svíček 2 hry o čtyřech svíčkách. Sedí nám to i maximálním počtem možností a navíc nikdy nemůžeme vypustit nějaké 2 náhodné kombinace, ale vždy bude k nějaké kombinaci existovat další lišící se maximálně v 1 svíčce. Hra je tedy vyhraná pro hráče č. 1. (Jelikož z této úvahy se můžeme snadno dostat ke kře o 2016 svíčkách).

9.4 M&M XXII. ročník; 4. série; 4. úloha

Potkala vás nešťastná nehoda – vašemu notebooku se rozbila klávesnice a touchpad. Situace ale není tak zoufalá, z kláves fungují šipky a Enter, navíc jste zrovna měli zapnutou softwarovou klávesnici. Softwarová klávesnice je obdélníková tabulka znaků s kurzorem. Kurzor vždy ukazuje na jeden znak a lze jím po tabulce pohybovat pomocí šipek. Stiskem klávesy Enter se vypíše znak, na který ukazuje kurzor. Text ahoj by bylo možno napsat na následující klávesnici (hvězdičkou je označena počáteční pozice kurzoru) jako:

Enter, →, Enter, →, Enter, ←, ↓, Enter

a*	h	o
b	j	a
r	3	g

Jelikož lenost je hybnou silou pokroku, chcete se při psaní co nejméně nadřít. Proto potřebujete vymyslet algoritmus, který pro zadaný text a zadanou klávesnici najde nejmenší počet stisků skutečných kláves (tj. šipek a Enteru), pomocí kterého lze text na klávesnici napsat. Pro klávesnici z příkladu a slovo ahoj nám stačí pět stisků kláves. Samozřejmě chcete, aby byl algoritmus co nejefektivnější²⁵. O klávesnici můžete předpokládat, že bude používat nějakou rozumně malou sadu znaků, například ASCII. A nezapomeňte, znaky se na klávesnici mohou opakovat!

²⁵O tom, jak efektivitu algoritmů nějak měřit, se můžeš dozvědět v následujícím povídání od našich kamarádů z KSP: <http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/25/cook1.html>

Jako první věc, nejprve musíme zjistit, jaké klávesy jsou nepoužívanější, jelikož mít třeba každou 2. klávesu w by moc smysl nedávalo...

Na <http://www.matematika.cz/frekvencni-analyza> jsem našel tyto data:

písmeno	relativní četnost	pořadí
a	0,09589	2
b	0,01776	21
c	0,02999	17
d	0,03775	11
e	0,10904	1
f	0,00175	23
g	0,00220	22
h	0,02497	19
i	0,06686	4
j	0,02306	20
k	0,03528	14
l	0,05721	6
m	0,03605	12
n	0,05917	5
o	0,08030	3
p	0,03115	16
q	0,00006	26
r	0,04397	9
s	0,05586	7
t	0,05385	8
u	0,03579	13
v	0,03952	10
w	0,00054	24
x	0,00036	25
y	0,02858	18
z	0,03303	15

V pořadí: e, a, o, i, n, l, s, t, r, v, d, m, u, k, z, p, c, y, h, j, b, g, f, w, x, q. Dále ještě bude ještě častá mezera.

Nemáme zde však další znaky jako mezeru nebo / < = >. Využití těchto znaků však silně závisí na tom, co děláme. Na začátek, to ale vynechme a vraťme se k tomu později.

Začneme s krátkým příkladem, budeme chtít klávesnici, se znaky e, g, f, w, x, q. (jedná se o nejčastější znak a 5 nejméně častých). Jak by mohla vypadat ideální klávesnice pro tyto znaky? Vzhledem k tomu, že e je nejpoužívanější, tak si ho určitě dáme častěji, navrhoval bych proto následující klávesnici:

g	e	f
e	w	e
x	e	q

Tato klávesnice má tu výhodu, že se můžeme snadno vždy dostat do e, což bude nejčastější písmeno. (to že bychom nemohli složit slovo teď neřešíme, řešíme pouze relativní četnosti jednotlivých písmen).

Obdobný postup bychom mohli aplikovat na klávesnici s celou abecedou, ale nesmíme ještě zapomínat na to, že ASCII má ještě čísla a další znaky. A tady bych představil pár nápadů:

Speciální znaky pod speciálními tlačítky: pokud bychom chtěli psát třeba čísla, tak přepneme do speciálního režimu, kde budou pouze čísla nebo speciální znaky...

Speciální klávesnice: Udělat přepínání mezi klávesnicemi, například pro prostý text (pouze písmena a mezera), programátorskou klávesnici (časté speciální znaky), matematickou klávesnici (častá čísla) nebo vyváženou klávesnici (od všeho trochu)...

Nekonečná klávesnice: Měli bychom jeden segment klávesnice, který by se furt opakoval, jelikož pokud bychom byly v pravém horním rohu klávesnice a další znak v levém dolním, tak pokud by byla kopie klávesnice umístěna nad a vedle a obecně všude kolem až do nekonečna, tak by se v některých případech mohly vzdálenosti mezi znaky razantně zkrátit. Například pro náš první případ bychom se tak z g dostali pouze příkazy: nahoru, doleva.

Pokusím se navrhnout nějakou klávesnici, která by víceméně uspokojovala potřeby všech, na začátek jsem opět použil tabulku s pravděpodobnostmi a doplnil jsem ji další potřebné znaky. Těm jsem podle uvážení přidal nějaká hodnoty, tudíž se už od teď nejednalo o pravděpodobnosti, ale pouze o nějaké hodnoty, které jaksí popisovaly relativní četnost znaků. Poté jsem provedl vynásobení konstantou (40) a zaokrouhlil nahoru, aby se zde vyskytovala každá hodnota, poté jsem provedl součet a chtěl jsem aby mi vyšlo něco okolo 100, protože $10^2 = 100$. Co jsem ještě nepoznamenal, ale je to důležité je to, že bude nejlepší pokud naše klávesnice bude mít čtvercový tvar, jelikož pokud by měla vypadala jako u počítače, tak z a do o (2. a 3. nejčastější znak, to je přes celou klávesnici), zatímco, pokud by měla tvar čtverce, tak by to bylo výrazně blíž.

a	4	n	3	" "	8	/	1	<	1
b	1	o	3	!	1	0	1	=	1
c	2	p	2	"	1	1	1	>	1
d	2	q	1	#	1	2	1	?	1
e	5	r	2	\$	1	3	1	'	1
f	1	s	3	,	1	4	1	{	1
g	1	t	2	(	1	5	1		1
h	1	u	2	)	1	6	1	}	1
i	3	v	2	*	1	7	1	~	1
j	1	w	1	+	1	8	1	del	1
k	2	x	1	,	1	9	1	esc	1
l	3	y	2	-	1	:	1	enter (en)	1
m	2	z	2	.	2	;	1	Σ	100

Vychází nám to pěkně (asi by bylo lepší použít klávesnici 20×20 (pro tuto klávesnici by byly počty opět jiné), ale to asi nezvládám nějak rozumně zpracovat, takže jsem se radši rozhodl jen pro 10×10 .

0	1	2	3	~		:	;	'	,
4	+	-	5	<	{	}	(	)	#
6	*	/	7	>	\$	!	?	"	.
8	9	=	,	esc	en	del	u	" "	n
e	r	a	" "	l	v	k	i	p	y
i	o	m	e	s	j	c	o	e	t
" "	d	b	q	g	x	" "	z	h	s
l	p	a	" "	f	n	a	m	u	" "
y	v	k	n	s	w	d	t	i	o
z	e	" "	.	a	c	r	" "	e	l

Jedná se pouhý návrh, dal jsem blíže a matematická znaménka, aby to nebylo daleko, pokud píšeme nějaká čísla. A méně používané znaky doprostřed, aby to k nim nebylo zas tak daleko. Přidal jsem i esc, enter a del, určitě se budou hodit. Otázkou je kolik budeme dělat překlepů atd (pokud píše tolik překlepů co já, tak by to měla být každá druhá klávesa :-D).

Co se týče složitosti případného algoritmu na psaní, tak bude mít vždy konečnou složitost, a pokud se bude tabulka opakovat, popřípadě půjde skákat z nejspodnějšího políčka tabulky na nejhornější, a stejně tak i horizontálně, tak maximální složitost bude 10 tahů (5 horizontálně, 5 vertikálně). Pro x znaků to bude $11x$ operací (+Enter). Reálně to však bude méně, něco okolo $6x$ až $8x$, bude to záležet na typu textu (znaků).

Pokud nám jde pouze o počet tahů (a nezáleží nám na výkonu), tak stačí pouze najít všechny znaky, řekněme že chceme napsat "a" a změříme všechny možné vzdálenosti do všech možných "a". Označme si souřadnice jako x_1, y_1 a x_2, y_2 . x -ovou nejkratší cestu spočítáme jako nejmenší výsledek následujících 3 rovnic:

- 1) $|x_1 - x_2|$ //na přímo - zde poté ještě musíme určit jestli máme jít nahoru nebo dolů
- 2) $(10 - x_1) + x_2$ //nahoru a skočit ze shora úplně dolů
- 3) $x_1 + (10 - x_2)$ //dolů a poté skočit zezdola úplně nahoru.

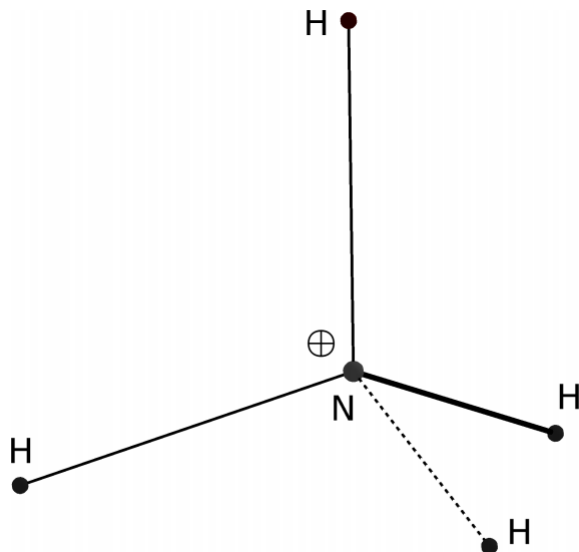
A stejně tak y -ovou jako:

- 1) $|y_1 - y_2|$
- 2) $(10 - y_1) + y_2$
- 3) $y_1 + (10 - y_2)$

Nikdy to nebude trvat déle než 10 posunů, možná by to šlo i trochu rychleji, to záleží na naší šikovnosti a jak budeme dobře schopni rozestavět jednotlivé znaky, jinak to, že všechny znaky jsou dostupné do 10 tahů ještě neznamena, že neexistuje nějaká lepší klávesnice, pro lepší algoritmus, jelikož pokud by všechny znaky byly dostupné do 14 pohybů, ale průměrná vzdálenost by klesla o 1 oproti naší klávesnici, tak taková klávesnice by byla lepší. Zároveň je ale také jednoduché takovou klávesnici rozestavět špatně. To co nás ale zajímá je to, kolik tahů je potřeba udělat průměrně, což záleží od specifikace daného textu atd. A bez ní nejsme schopni nějak efektivněji navrhovat rozestavění textu. Ve větší klávesnici by se také hůř orientovalo a asi by bylo lepší jí nechat navrhnout a otestovat nějaký superpočítač, ten by ale používal stejná pravidla jako my, načež by provedl testování na nějakém textu.

9.5 M&M XXII. ročník; 4. série; 5. úloha

Urči výběrová pravidla pro amonný kationt NH_4^+ . Porovnej s výsledky pro neutrální molekulu amoniaku. Hledat popis konkrétních vibrací pomocí délek vazeb a úhlů mezi nimi nemusíš.



Amonný kationt má tvar čtyřstěnu. Určíme bodovou symetrii. Lineární není, jedinou rotační osu nemá $6C_5$ ne $4C_3$ ano, $3C_4$ ne, $3C_4$ ano, jedná se o grupu T_d .

Tabulka charakterů:

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$	lineární kombinace, rotace	kvadratické kombinace
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)

Na identitě leží všech 5 atomů. Na trojčetných osách vždy 2. Na dvojčetných leží pouze 1. Na S_4 pouze 1 a na σ_d vždy 3.

Charakter identity je 3, trojčetných os 0, dvojčetných -1, charakter rovin 1.

$$\begin{aligned}\chi^0(S_4) &= 2 \cos \frac{2\pi 1}{4} + 1 = 1 \\ \chi^0(S_4^1) &= 2 \cos \frac{2\pi 2}{4} + 1 = -1 \\ \chi^0(S_4^2) &= 2 \cos \frac{2\pi 3}{4} + 1 = 1 \\ \chi^0(S_4^3) &= 2 \cos \frac{2\pi 4}{4} + 1 = 3\end{aligned}$$

Pokud jsem pochopil anglickou wikipedii tak je to 1

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$	lineární kombinace, rotace	kvadratické kombinace
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)
n_R	5	2	1	1	3		
$\chi^0(R)$	3	0	-1	1	1		
$\chi(R)$	15	0	-1	1	3		

$$a_1 = \frac{1}{24}[15 + 0 - 3 + 6 + 18] = 1,5$$

$$a_2 = \frac{1}{24}[15 + 0 - 3 - 3 + 18] = -0,5$$

$$e = \frac{1}{24}[30 + 0 - 6 + 0 + 0] = 1$$

$$t_1 = \frac{1}{24}[45 + 0 + 3 + 6 - 18] = 1,5$$

$$t_2 = \frac{1}{24}[45 + 0 + 3 - 6 + 18] = 2,5$$

Zprvė není možné aby zde reprezentace byla $1,5 \times$ a nemůžte tu být též záporný počet reprezentací.

Popravdě nevím moc kde je chyba, docela jsem na to chvíli (večer) koukal a jedno z mála, co mě asi tak napadlo je, že by se ten počet atomů u rotací bral pouze ten/ty společné všem $8/3/6$ a stejně tak i zrcadlením.

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$	lineární kombinace, rotace	kvadratické kombinace
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)
n_R	5	1	1	1	1		
$\chi^0(R)$	3	0	-1	1	1		
$\chi(R)$	15	0	-1	1	1		

Pak to vychází 1, 0, 1, 2, 2, což by dávalo smysl, protože T je 3-rozměrná, tak jedna T_1 by připadla na translace a jedna T_2 na rotace, a na vibrace zbude $1A_1, 1E, 1T_1, 1T_2$. Toto ale asi není správně, ale jen tak mi ta čísla vyšla smysluplně :/

Nebo pak kdyby byl charakter reflexních rotací -1:

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$	lineární kombinace, rotace	kvadratické kombinace
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)
n_R	5	2	1	1	3		
$\chi^0(R)$	3	0	-1	-1	1		
$\chi(R)$	15	0	-1	-1	3		

Tak by počty reprezentací byly 1, 0, 1, 1, 3. A opět protože T jsou 3-rozměrné, tak $1T_1$ na translace a $1T_2$ na rotace. Ostatní (A_1 , E , $2T_2$) na vibrace.

Celková dimenze ve všech případech (i v těch s půlkami reprezentací) sedí.

10 M&M XXII. ročník 5. série

10.1 M&M XXII. ročník; 5. série; 1. úloha

Představte si skupinku státních zástupců, kteří by rádi zjistili, jaký je jejich průměrný plat, ale přitom žádný z nich nechce výši toho svého prozradit. Poradíte jim, jak jejich průměrný plat zjistit, aniž by se některý z nich dozvěděl výši platu někoho dalšího? Právníci nemají k dispozici žádný materiál, mohou využívat jen své hlavy.

Vymyslel jsem několik způsobů, liší se estetičností a humánností.

Nejprve jsem vymyslel, že by se stanovily postupně cenové hranice. Třeba 20 000 Kč (20 kKč) až 30 000 (30 kKč) a opět po desítkách (prostě nějaké intervaly). A pak byl vybrán někdo, kdo by se otočil zády a poté by všichni vytvořili řadu a zavřeli oči tak (a měli rozestupy), aby nikdo necítil jak reaguje ten vedle něho a poté by ona osoba se zavřenými oči prošla a počítala by do kolika rukou narazila, nakonec by onen počet nahlásila (případně by přičetla sebe – nikdo by na to neměl jak přijít). Poté by šel další kolo, je otázka, zda by se pak neměli všichni promíchat – to záleží na tom jak si všichni věří, ale pokud nepodvádí, tak by to nemělo být nutné.

Poté mě napadlo, že by detekce mohla ještě probíhat tak, že by se jen onen vybraný odebral stranou, ostatní by se otočili a pak by po jednom chodili a dotýkali by se ho, kopali do něj... :D Naše představivost nemá mezí. :D Dále by to probíhalo stejně, osoba by hlásila, kolikrát byla zkopána, ale na to by asi nikdo nepřistoupil :D

Poté mě napadl asi nejvědeckější a nejhumánnější způsob a to, že by si nejprve první vymyslel nějaké velké číslo (opravdu velké a náhodné (bilióny)) a poté by k němu další přičítali svůj plat, poté by se tato hodnota vrátila k prvnímu, on by od ní odečetl onu počáteční hodnotu a poté by přičetl svůj plat a vydělil by ho počtem lidí – tak dostaneme naši hledanou hodnotu přesně a humánně (bohužel? :D).

10.2 M&M XXII. ročník; 5. série; 2. úloha

V homogenním gravitačním poli máme svislou pružinku s tuhostí k , na které je upevněna miska o hmotnosti m_1 . Na miskou, která je v klidu v rovnovážné poloze, hodíme míček o hmotnosti m_2 . Z jaké výšky ho musíme pustit, aby se po odskoku a rozkývání misky na ni vrátil v okamžiku, kdy prochází miska rovnovážnou polohou směrem nahoru? Jak vysoko poté vyskočí? Jaké musí být podmínky pro hmotnosti m_1 a m_2 ? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné a trvají zanedbatelně krátkou dobu.

Nejprve si můžeme představit situaci: Nejprve hodíme míček na misku a pružinka udělá "kyv" od středu dolů a odzdola do středu, poté začne být její zrychlení záporné a přestane urychlovat míček a dojde k jejich oddělení. Poté miska vykoná celý kmit, zatímco na míček bude působit gravitační síla vykoná tu samou dráhu nahoru a dolů, doba letu míčku tedy bude shodná s jednou periodou kmitu. Perioda se spočítá jako:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Doba prvního kyvu bude:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}.$$

Zatímco po ztrátě míčku:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

Dále také víme, že můžeme spočítat dobu, kterou se bude míček pohybovat vzduchem, je jasné že se bude pohybovat s nějakou rychlostí nahoru a s přesně opačnou rychlostí bude i dopadat, takže změna rychlosti bude $2v$ a této změny dosáhneme se zrychlením g v čase t :

$$2v - gt = 0,$$

$$t = \frac{2v}{g}.$$

A tak můžeme napsat vztah:

$$2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{2v}{g},$$

$$\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}g = v.$$

Dále také předpokládáme to, že všechny srážky jdou dokonale pružné. Proto bude platit, že ona rychlost, kterou jsme si právě vyjádřili bude rovna, té kterou míček dopadne nejdříve na misku a my víme, že $v = at$, v našem případě $v = gt$ proto:

$$\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}g = gt,$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

Z doby pádu můžeme spočítat dráhu pádu:

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Po dosazení:

$$h = \frac{1}{2}g \left(\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \right)^2,$$

$$h = \frac{1}{2}g\pi^2 \frac{m_1}{k},$$

$$h = \frac{m_1 g \pi^2}{2k}.$$

Pokud bychom chtěli, aby nenarazil po 1 kmitu, ale po 2, po 3... , tak bychom pouze vynásobili délku periody kmitu příslušným koeficientem.

Pokud se budeme zajímat o to jak vysoko míček vyskočí, tak musíme počítat s tím, že miska a míček si své hybnosti vymění. Rychlost míčku v momentě dopadu už známe:

$$v = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} g.$$

My však ale potřebujeme především znát hybnost misky a tudíž její rychlost. Pro spočítání rychlosti misky nejprve spočítáme frekvenci s kterou kmitá:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

Dále budeme potřebovat vzoreček pro výpočet rychlosti:

$$v = \omega y_m \cos(\omega t).$$

ω snadno spočítáme jako:

$$\omega = 2\pi f.$$

Dále můžeme říci, že let koule má rovněž frekvenci, která bude poloviční oproti misce:

$$f = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

Výchyly budou 1. i 2. kyvu stejné. Tu 1. spočítáme opět přes:

$$v = \omega y_m \cos(\omega t).$$

Vyjádříme y_m :

$$y_m = \frac{v}{\omega}.$$

$\cos(\omega t)$ nám vypadává jelikož pro maximální výchylku bude výraz roven 1. Parametry spočítáme jako:

$$v = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} g,$$

$$\omega = 2\pi f,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}},$$

$$f = \frac{1}{T}.$$

Z toho si vyjádříme výchylku jako:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}},$$

$$\omega = 2\pi \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}},$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}},$$

$$y_m = \frac{\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} g}{\frac{1}{\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}},$$

$$y_m = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} g \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}},$$

$$y_m = \pi \frac{m_1 + \sqrt{m_1 m_2}}{k} g.$$

Po ztrátě míčku má miska periodu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

Dále se budou hodit další údaje:

$$v = \omega y_m \cos(\omega t),$$

$$\omega = 2\pi f,$$

$$f = \frac{1}{T}.$$

Tedy:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}},$$

$$\omega = 2\pi \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}},$$

$$v = \omega y_m \cos(\omega t),$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \left(\pi \frac{m_1 + \sqrt{m_1 m_2}}{k} g \right),$$

$$v = \frac{\pi g(m_1 + \sqrt{m_1 m_2})}{\sqrt{\frac{m_1}{k}} k},$$

$$v = \frac{\pi g(m_1 + \sqrt{m_1 m_2}) \sqrt{k}}{\sqrt{m_1} k}.$$

Hybnost spočítáme jako:

$$p = vm.$$

Tudíž hybnost misky spočítáme jako:

$$p = \frac{\pi g(m_1 + \sqrt{m_1 m_2}) \sqrt{k}}{\sqrt{m_1} k} m_1,$$

$$p = \frac{\pi g(m_1 + \sqrt{m_1 m_2}) \sqrt{k} \sqrt{m_1}}{k}.$$

Tuto hybnost bude mít koule po srážce a odrazu, tudíž rychlost spočítáme snadno jako:

$$v = \frac{p}{m},$$

$$v = \frac{\pi g(m_1 + \sqrt{m_1 m_2}) \sqrt{k} \sqrt{m_1}}{k m_2}.$$

Pomocí toho už dráhu míčku spočítáme jako:

$$t = \frac{v}{g},$$

$$t = \frac{\pi(m_1 + \sqrt{m_1 m_2})\sqrt{k}\sqrt{m_1}}{km_2}.$$

A z toho dráhu jako:

$$h = vt - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$h = g \left(\frac{\pi(m_1 + \sqrt{m_1 m_2})\sqrt{k}\sqrt{m_1}}{km_2} \right)^2 - \frac{1}{2}g \left(\frac{\pi(m_1 + \sqrt{m_1 m_2})\sqrt{k}\sqrt{m_1}}{km_2} \right)^2,$$

$$h = \frac{1}{2}g \left(\frac{\pi(m_1 + \sqrt{m_1 m_2})\sqrt{k}\sqrt{m_1}}{km_2} \right)^2.$$

Spočítali jsme tedy i do jaké výšky míček odskočí.

10.3 M&M XXII. ročník; 5. série; 3. úloha

Nechť f je funkce definovaná na celé reálné přímce. Je známo, že se pak dá zapsat jako součet dvou funkcí, z nichž jedna je sudá (má graf symetrický podle osy y) a druhá je lichá (má graf středově symetrický podle počátku). Dá se funkce f zapsat jako součet dvou funkcí, z nichž každá má graf osově symetrický podle nějaké (ne nutně stejné) přímky?

Přiznám se, že mě napadaly argumenty proč by to mělo i nemělo jít.

Nejprve můžeme s jistotou určit, že určitě lze rozložit konstantní funkce. (představme si to na funkci $y = 0$, tak tam si můžeme představit 2 funkce, které před 0 budou rovny 0 a pak se jedná vydá nahoru a druhá dolů pod opačným úhlem).

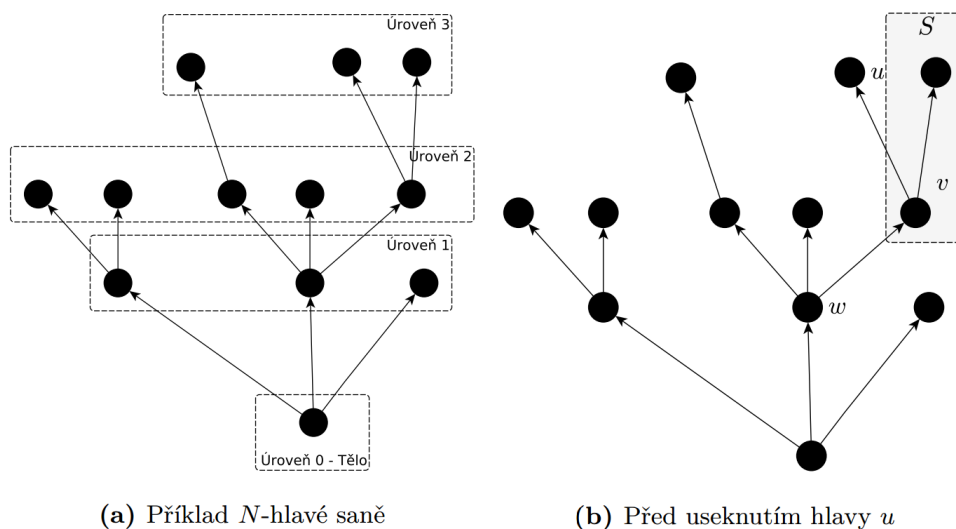
Podle mě to ale nejde pro úplně všechny funkce, například pro liché jako x^3 , jelikož nikdy nebudeme schopni vymodelovat, to že na obě strany je čím dál strmější a navíc jde až do nekonečna.

Moje úvahy především vycházejí z pokusů, co jsem se pokoušel narýsovat GeoGebře, všechno to ale byla pouze změt čar, takže je zbytečné to prezentovat, jelikož je to nevysvětlitelné, měl jsem ale problémy, že když se mi podařil nastavit kousíček funkce správně, tak už nikdy nešel zbytek, ani po pokusech upravit všechno možné, to mě vede k závěru, že to nejde.

Hlavní důvod je podle mě ten, že lichá funkce má určité vlastnosti, které nikdy nebudeme schopni se 2 sudými funkcemi nasimulovat. Jelikož jedna z našich sudých funkcí musí reprezentovat onu sudou a druhá už sama lichou nikdy nezastoupí. Tudíž můj závěr je, že to nejde.

10.4 M&M XXII. ročník; 5. série; 4. úloha

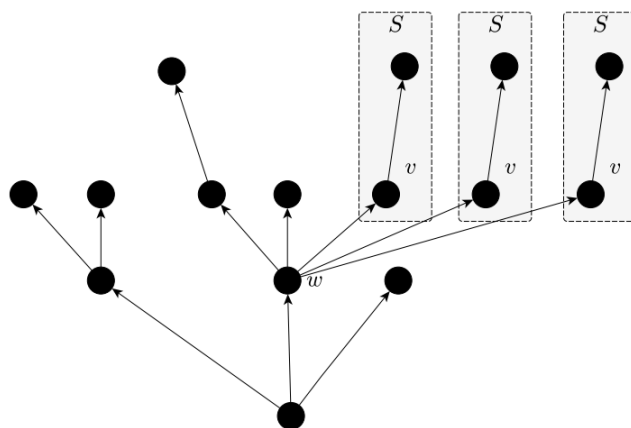
Chytrý Honza se rozhodl zachránit zakletou matfyzáčku, kterou unesla strašlivá N -hlavá saň a hlídá ji ve svém doupěti pod Malostranským náměstím. Honza nechce nic ponechat náhodě, a tak si připravuje taktiku, jak saň porazit. Taková N -hlavá saň se skládá ze dvou základních částí – krků a uzlů. Každý krk vždy spojuje dva uzly. Nejdůležitějším uzlem je tělo. Z toho vyrůstá několik krků, na konci každého je uzel, ze kterého může vyrůst několik krků atd. Každý uzel má úroveň, podle toho, jak daleko je od těla, tedy tělo je na úrovni nula, uzly spojené s krkem jsou na úrovni jedna, uzly, které jsou dva krky daleko od těla jsou na úrovni dva a tak dále.



Obrázek 1: Saň

Honza chce saň zabít tím, že jí postupně usekne všechny hlavy (to jsou uzly, ze kterých nevede žádný krk do vyšší úrovně). Jakmile sani zbývá jen tělo, zemře. V každém kroku si Honza vybere jednu hlavu a usekne ji. Ale ouha, sani hlavy dorůstají. Předpokládejme, že v K -tém kroku usekne Honza hlavu u , označíme si v uzel, ze kterého vede krk do u a S budeme říkat celé struktuře krků a uzlů, která vyrůstá z v (včetně v , ale bez u). Ještě si označíme w ten jediný uzel spojený krkem s v takový, že w je na nižší úrovni než v . Potom saň sice přijde o hlavu u , ale zároveň z w vyroste K nových kopií S . Usekne-li Honza hlavu, která vyrůstá přímo z těla, pak sani nic nedoroste. Příklad, jak může takové useknutí hlavy proběhnout, je na

Obrázku 1b a 2. Krom dorůstání může hlava vzniknout z libovolného uzlu, který přišel o všechny krky vedoucí do vyšší úrovně. Ukažte, že Chytrý Honza dokáže zabít každou N -hlavou saň.



Jeden z Honzových cílů by se dal označit jako stínat více hlav, než jich doroste, nejprve si představíme nějaké situace, kdy to půjde lehce a poté si ukážeme situace, to bude něco komplikovat.

Vycházejme ze saně, která je v zadání, zde se $K = 3$. Nejprve bych si rozmnožil krky vyrůstající z těla. Rozdělme si krky na svazky levý, střední, pravý, podle toho jak vyrůstají z těla. Nyní si vybereme nějaký krk z prostředního svazku. Osobně bych vybral ten nejvíce nalevo ve třetí úrovni. Poté uřízneme jeden z levého svazku a poté ten druhý krk z levého svazku a jelikož jsme na 3. tahu, tak tu máme dorůstání a dorostou nám tedy 3 hlavy, vyrůstající přímo z těla, budeme mít tedy $1+3+1=5$ krků vyrůstajících z těla. To nám už bude určitě stačit k tomu, abychom vždy usekly 2 hlavy a při 3. uřezáváním jsme mohli uříznout hlavu vyrůstající z těla a tudíž, aby žádná hlava nevyrostla, poté opět uřízneme 2 hlavy a opět hlavu vyrůstající z těla a takto dokud saň neporazíme.

Co by tedy mohla být pro Honzu největší katastrofa. Představme si to nyní na malých číslech, budeme mít tělo, z něho 1 krk, na něm hlavu a z něho 5 krků s hlavami. A $K = 2$. Jak vidíme, tak nemáme moc na vybranou. Usekneme hlavu, poté druhou a budeme mít $2 \times$ struktur S o 3 hlavách. Což jsme si na první pohled moc nemohli. Zkoncentrujme se ale na 1 strukturu S , usekneme jí 2 hlavy a budeme mít $1 \times S_1$ o třech hlavách a $2 \times S_2$ o jedné hlavě (myslím samozřejmě v 2. úrovni pouze). Nyní vždy usekneme onu 1 hlavu, na druhý tah nám bude zbývat ona hlava vyrůstající z těla, tudíž nic se neděje. Totéž provedeme s druhou S_2 . A zbývá nám pouze $1 \times S_1$ o třech hlavách. Nyní už je jasné, jak tuto strukturu už jednoduše zlikvidujeme stejným způsobem jako první strukturu.

Jak vidíme, tak si takto poradíme s libovolnou strukturou, jelikož když máme složité struktury, tak vždy nám hrozí že dostaneme další hrozné struktury, ale důležité je, aby byly jednodušší a jednodušší. Všimněme si také, že na první pohled se situace na určitou chvíli stává ještě komplikovanější. Nejdůležitější je ale z toho vyplývající poznatek, že ať ale děláme cokoli (ať děláme sebevětší chyby), tak nikdy si nemůžeme zablokovat cestu k vítězství, vždy tedy máme vítěznou strategii a vždy t

10.5 M&M XXII. ročník; 5. série; 5. úloha

Zpracuj dvojici částic se spinem 1. To znamená:

1. *Najdi vlastní čísla a vlastní vektory operátoru $\hat{S}_z$ (1b)*
2. *Napiš posunovací operátory pro spin 1. (1b)*
3. *Najdi bázi, pro kterou budou mít matice operátorů kvazidiagonální tvar, a popiš, co je výsledkem. (1,5b)*
4. *Ukaž, že matice alespoň dvou operátorů jsou v této bázi skutečně kvazidiagonální. (1,5b)*

1) Není mi úplně jasné co má být v 1), jelikož v seriálu už vlastní čísla a vektory operátoru $\hat{S}_z$ už jsou, vlastní čísla operátoru jsou $\hat{S}_z: \pm \frac{\hbar}{2}$. Vlastní vektory pak: $\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

2) Posunovací operátory získáme jednoduše: $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y$ a $\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y$.

$$\sigma_+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_- = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - i \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Nejprve si zvolme nějaký vektor jako bázi: $(1, 0, 0)$ a aplikováním posunovacích vektorů dostaneme $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$, což by měly být naše báze vektory. Jejich skalární součet je vždy 0, takže jsou kolmé. Dostali jsme souřadnice normálního prostoru.

4) Principiálně to asi chápu, ale nespočítám to :/

Zoufalý pokus:

$$= \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$= \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

11 M&M XXII. ročník 6. série

11.1 M&M XXII. ročník; 6. série; 1. úloha

Každé přirozené číslo²⁶ obarvíme černě, nebo bíle tak, že součet každé různobarevné dvojice je černý, zatímco součin je bílý.

- a) Jakou barvu má součin dvou bílých čísel?*
- b) Charakterizujte všechna vyhovující obarvení*

²⁶Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Nejprve obarvíme všechna čísla na černo. Nyní si si vyberme nějaké číslo větší než 1, řekněme 3, to obarvíme na bílo. Nyní postupně vezmeme všechna čísla:

Nejdříve 1: $1 \cdot 3 = 3$ a $1 + 3 = 4$, 3 už bílá je 4 bude černá.

Dále 2: $2 \cdot 3 = 6$ a $2 + 3 = 5$, 6 obarvíme na bílo, 5 bude černá.

3 samu se sebou násobit ani sčítat nemůžeme.

Dále 4: $4 \cdot 3 = 12$ a $4 + 3 = 7$, 12 obarvíme na bílo, 7 zůstane černá.

Takto můžeme pokračovat do nekonečna vyjde něco takového:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	<i>36</i>	37	38	39	40	41	42	43	44	<i>45</i> ...

Tučná čísla jsou černá a čísla označená kurzívou (18, 36, 45) jsou součiny 2 bílých čísel, jak vidíme tak jsou černá.

Můžeme tedy udělat to, že všechna čísla zvolíme jako černá, poté zvolíme jedno bílé a poté se nám ostatní čísla sama vygenerují, stačí pouze projít každé číslo jedno po druhém a vynásobit ho s vybraným číslem (třeba 3) a dostaneme seznam bílých čísel.

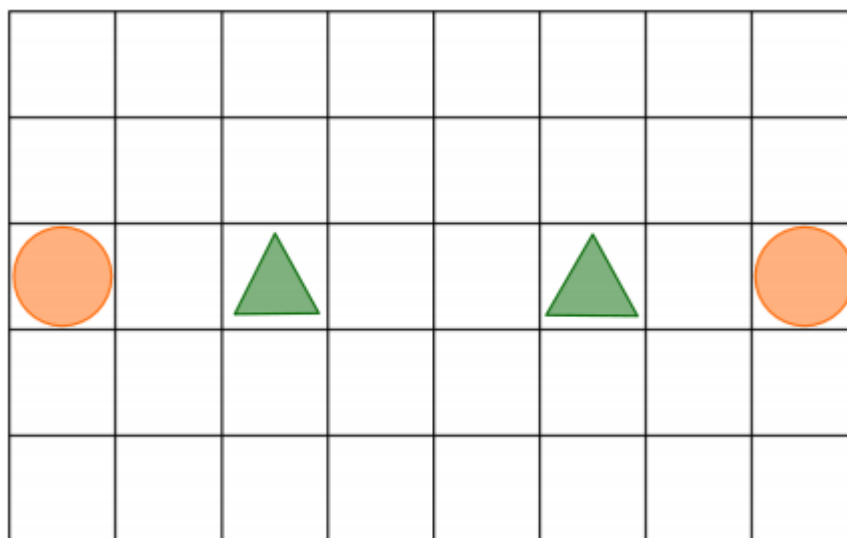
Jde o to, že tato čísla (označme si je n) jsou vždy násobky 1. bílého čísla (m), ale jelikož další čísla dostáváme tak, že ho násobíme s černými, tak číslo $\frac{n}{m}$ by dalo m , ale jelikož už bylo obarveno na bílo, tak nám toto číslo další bílé nevygeneruje a proto n zůstane černé. A součiny jiných bílých rovněž vždy dají černé, jelikož tato čísla jsou násobky m a proto jejich součin musí být tedy vždy černý.

Všimněme si, že když si vybere číslo n , tak bílá čísla se nám periodicky opakují po n a občas zde bílé číslo chybí a to vždy po n^2 . A naopak po n^3 zde opět bílé číslo je a tak dále...

Zkoušel jsem i vybrat 2 čísla, ale poté, co jsem dokončil obarvení na bílé, pomocí pravidla pro násobení, tak mi nesesedlo pravidlo pro sčítání.

11.2 M&M XXII. ročník; 6. série; 2. úloha

V lese o velikosti 40 polí stojí 2 myslivci (trojúhelníky) a před nimi prchají 2 lišky (kolečka). Lišky jsou velmi rychlé a chytré. Aby byl hon úspěšný, myslivci je musí chytit. Každý z myslivců se tedy v každém tahu posune o právě jedno pole vodorovně či svisle, v pohybu po úhlopříčce jim brání pravidelně vysazený les. V tu chvíli přestává být pozice lišek bezpečná, proto se každá z nich posune o právě jedno pole podle stejných pravidel jako myslivci. Nyní hon pokračuje opět pohybem myslivců a dál se pohyb lišek a myslivců pravidelně střídá. Liška je ulovena myslivcem, pokud se myslivec přesune na pole, na kterém právě stojí liška. Přesune-li se liška na pole, na kterém právě stojí myslivec, je též ulovena. Ulovená liška vypadává ze hry. Lišky mohou být uloveny postupně. Poženu se myslivci za liškami donekonečna? Nebo lišky nakonec podlehnou myslivcům, ať se budou snažit sebevíc? Zjistěte, zda existuje pro lišky neprohrávající nebo pro myslivce vyhrávající strategie a popište ji.



Nejlepší co mohou myslivci udělat je že spojí a lišky uloví postupně.

Řekněme, že nejprve ulovíme lišku napravo. Poté půjde levý myslivec doprava a levý mu půjde na pomoc. Dále jsou na tahu lišky, levá liška je nyní přitlačena ke zdi a může jí nahoru a nebo dolů a ani nic jiného dělat nemůže jen nahoru a dolů, vždy se někam pohne a v dalším tahu se opět myslivec postaví na pole nalevo od ní. Bude mít tedy opět pouze na výběr nahoru a dolů a zůstane přitlačena ke zdi. Poté si už jen počkáme na druhého myslivce, než k ní přijde a zabije jí. Jelikož dojde řekněme doprostřed a poté už půjde pouze podle potřeby nahoru nebo dolů, liška je mrtvá.

Nyní je potřeba zabít druhou lišku. To už není tak těžké. Nejprve řekněme že liška je kdekoliv (nejvýhodnější pro ní bude přijít blíže, aby poté měla prostor na ústup), myslivci budou v poslední a předposlední linii.

A nyní se myslivec blíže dostane na stejnou řádku jako je liška následovně k nim dojde druhý myslivec (tak jako tak je vždycky dojde, prostě půjde k nim liška nemůže utíkat do nekonečna jelikož by ji došel les).

A nyní si všimněme, že myslivci se nikdy nemohou dostat do polohy, že by byli u sebe přes úhlopříčku, ale pouze vedle sebe.

Vyrovnáme si tedy oba myslivce vedle sebe a nyní mají stejnou y -ovou souřadnici jako zajíc (y -ovou v kartézské soustavě). (Pokud by y -ová nesouhlasila tak jí prostě jednoduše dosáhneme jak jsme už řešili výše. (budeme následovat lišku a za chvíli už nebude mít kam utíkat))

Dále provedeme tah takový, že oba myslivce posuneme o 1 pole blíže zajíci, poté opět srovnáme se zajícem a opět postupujeme dále, pokaždé, když souřadnice souhlasí, tak se posouváme blíže.

Je jedno, že někdy budou „napřed“ myslivci a někdy zajíc, jelikož vždy, když bude souřadnice souhlasit, tak postupujeme. Zajíc nás obejít nemůže, to jistí onen zadní myslivec. Jelikož tím, že pronásledujeme jeho souřadnici můžeme vždy být maximálně tah pozadu, ale díky tomuto tahu se může dostat za 1. myslivce nikoli však za druhého.

11.3 M&M XXII. ročník; 6. série; 3. úloha

Vzpomínáte si, jak se tehdy rozbila klávesnice vašeho notebooku? Museli jste použít softwarovou klávesnici v podobě obdélníkové tabulky znaků, na které jste psali pomocí kurzoru, kterým jste pohybovali šipkami (spolu s Enterem jediné funkční klávesy) (viz Úloha 4 v čísle 22.4²⁷). Klávesnice byla tenkrát tak hloupě navržena, že jste psaním strávili dlouhé hodiny. Zkušenost to byla natolik traumatizující, že jste se rozhodli navrhnout si vlastní klávesnici, na které půjde psát i dlouhé texty rychle.

Chcete tedy navrhnout klávesnici o rozměru 8×8 znaků tak, aby nejmenší nutný počet stisků šipek a Enteru k napsání zadaného textu²⁸ byl co nejmenší. Klávesnice rozlišuje velká a malá písmena (tedy L a l jsou dva různé znaky), mezera a interpunkční znaménka (tečka, čárka, vykřičník, otazník) jsou také plnohodnotné znaky, odřádkování ignorujte (tj. chovejte se k textu jako by byl napsaný celý na jedné řádce). Počet bodů, které za řešení obdržíte, se bude odvíjet od toho, kolik je třeba stisků kláves k napsání textu na vaší klávesnici (čím méně, tím lépe). Dále můžete dostat až dva body za vysvětlení toho, jak jste vaši klávesnici vytvořili.

²⁷Do úlohy se nám bohužel vloudila chyba, neboť slovo ahoj v příkladu lze napsat na osm stisků, ne na pět. Všem se moc omlouváme za zmatení

²⁸Text je k dispozici na následující adrese: https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/22-6-3-klavesnice_vstupni-text.txt

Určitě nebude špatné, když si nejprve rozložíme text na jednotlivé znaky. A spočítáme jejich četnost: Celkem zde máme: 23 423 znaků. A 46 unikátních

Znak	Počet	%	Pořadí	Počet	Znak	Počet	%	Pořadí	Počet
'LF'	206	0,88%	21	1	'a'	1448	6,18%	7	2
' '	3327	14,20%	1	5	'b'	290	1,24%	17	1
'.'	322	1,37%	16	1	'c'	739	3,16%	13	1
'A'	65	0,28%	29	1	'd'	537	2,29%	14	1
'C'	110	0,47%	24	1	'e'	2211	9,44%	2	4
'D'	34	0,15%	32	1	'f'	86	0,37%	27	1
'E'	28	0,12%	36	1	'g'	286	1,22%	18	1
'F'	16	0,07%	40	1	'h'	141	0,60%	22	1
'H'	1	0,00%	45	1	'i'	1899	8,11%	3	3
'I'	63	0,27%	30	1	'j'	34	0,15%	32	1
'J'	6	0,03%	43	1	'l'	1119	4,78%	9	2
'L'	33	0,14%	34	1	'm'	865	3,69%	11	1
'M'	56	0,24%	31	1	'n'	1203	5,14%	8	2
'N'	132	0,56%	23	1	'o'	802	3,42%	12	1
'O'	8	0,03%	41	1	'p'	410	1,75%	15	1
'P'	87	0,37%	26	1	'q'	267	1,14%	19	1
'Q'	31	0,13%	35	1	'r'	1018	4,35%	10	2
'R'	5	0,02%	44	1	's'	1555	6,64%	6	3
'S'	73	0,31%	28	1	't'	1649	7,04%	5	3
'T'	22	0,09%	38	1	'u'	1869	7,98%	4	3
'U'	21	0,09%	39	1	'v'	229	0,98%	20	1
'V'	88	0,38%	25	1	'w'	24	0,10%	37	1
'W'	1	0,00%	45	1	'y'	7	0,03%	42	1

znaků s tím, že 'LF' je znak pro odřádkování, který podle zadání nepotřebujeme takže máme 45 znaků - to je důležitý údaj jelikož máme klávesnici 8×8 znaků, což je 64 znaků, máme tedy 19 volných míst (pro každý znak, co se vyskytuje v textu potřebujeme bezpodmínečně klávesu).

Těchto 19 znaků je tedy třeba obsadit, ale nyní vyvstává otázka které, je jasné, že v úvahu přichází pouze 19 nejčtenějších znaků - určitě nebudeme dávat znak který napíšeme $1 \times$ na 20 kláves. První co nás napadne je, že zde prostě dáme 19 nejčtenějších znaků na tyto klávesy, ale poté by znak který je zde $267 \times$ krát bude zastoupený jako mezera, která je zde $3327 \times$. To by

bylo krátkozrakém proto zde některé znaky asi budou i $3\times$.

Přiznám se, že jsem trochu experimentoval a že jsem zkoušel zapojit logaritmy o různých základech a logaritmovat počty výskytu kláves, ale vždy vzniklo to, co jsem popisoval výše. 19 zbylých kláves se rozdělilo mezi 19 nejčastějších. Což nechceme z již popsáných důvodů.

Nakonec mě napadlo, že pouze vydělím všechny výskyty nějakou konstantou, výsledky pak zaokrouhlím a kde vypadne 0 tak ji nahradím 1. Vše jsem sčítal a hrál si postupně s konstantou až při 610 mi součet vyšel 64. Počty jsou v posledním sloupečku tabulky.

Když jsem se podíval, kolikrát zde bude zastoupena mezera a kolikrát ji musíme napsat, tak mi to přišlo jako rozumné.

Odbočka: Co by bylo nejlepší?

Teoreticky existuje poměrně jednoduchý algoritmus na najetí nejlepší varianty (jednoduchý na popsání). Nejprve vyřešíme počty kláves - rezervujeme 1 blíže nespecifikované místo pro každou klávesu, kterou budeme potřebovat. Poté nám zůstane 19 zbylých, ty náhodně rozdělíme mezi 19 nejčastějších (klidně i všechny na jeden znak - všemi možnými způsoby (Podmínka: Zastoupenější klávesa zde musí být vícekrát)).

Nyní když máme vygenerované počty kláves, tak náhodně rozházíme znaky po klávesnici (samozřejmě vyzkoušíme všech $64!$ možností ;) :D). A nyní budeme psát daný text - budeme psát a když se dostaneme ke znaku, který máme na klávesnici vícekrát, tak se zastavíme a uděláme simulaci: Zkusíme jít do každé možné klávesy (kde je požadovaný znak, co klávesa to scénář) a odtud budeme dále psát text, pokud bude další znak jen na jedné klávese, tak půjdeme ve všech scénářích na ní. Nyní spočítáme kolik stisků bylo potřeba a vydáme se tou cestou. Pokud další klávesa bude rovněž zastoupena vícekrát, tak pouze stačí v každém scénáři vytvořit podscénáře a celý postup rekurzivně opakovat.

Nyní tedy máme vygenerovanou klávesnici a máme spočítaný počet stisků kláves. Nyní si uložíme klávesnici do databáze a vygenerujeme si novou, poté si budeme vždy pamatovat tu nejlepší a zbytek zapomeneme.

Problém je, že náročnost výpočtu je něco jako:

$64! \cdot 19!$ nepěkný výpočet počtu stisků kláves

Nepěkný proto, protože budeme muset simulovat všechny možné varianty psaní a vybírat nejlepší. Co se týče výše napsané složitosti: tak to asi zrovna moc nechceme (ve skutečnosti je to o něco jednodušší (některé možnosti můžeme předem vyloučit), ale ani tak nic pěkného). Pokud bychom procházeli všechny možnosti nějak systematicky, tak se zaručeně dostaneme k nejlepšímu možnému řešení.

Zpět k tématu

Máme tedy „vypočítané“ počty kláves a nyní k jejich rozmístění. Co určitě budeme chtít je že dáme nejčtenější znaky do prostředka, určitě tam nedáme znak, který napíšeme $1\times$, abychom o něj furt klopýtali.

Pokud bychom měli dělat nějakou klávesnici jen tak od oka, tak bych udělal to, že začneme od nejméně zastoupených znaků a nejméně zastoupené znaky bych dával systematicky do rohů, když budeme psát, tak tak to přežijeme, že $1\times$ za 20 000 znaků budeme muset na kraj klávesnice, alespoň se nám tam nebudou motat normálně.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	W	O	D			M	F	H
2	y	j					I	U
3	L							A
4								
5								
6	S							N
7	T	f					C	Q
8	R	w	P			V	E	J

Takto rozmístíme 24 znaků, které jsou zde nejméně četné, jak můžeme vidět tak 4 nejméně používané jsou úplně v rohu, poté 8 nejméně používaných v „druhé řadě“ a 12 ve „třetí“. V další řadě už bychom dávali čtenější znaky, které zde budou dvakrát, tudíž je potřeba je nedávat vedle sebe. Ještě ale můžeme vyplnit okraje 8 dalšími znaky, které nejsou tak časté, aby byly 2× zastoupené.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	W	O	D	h	v	M	F	H
2	y	j					I	U
3	L							A
4	q							d
5	g							p
6	S							N
7	T	f					C	Q
8	R	w	P	b	.	V	E	J

Zbývá nám ještě 32 volných kláves. Rozhodně nemůžeme postupovat stejným způsobem jako předtím, jelikož nyní bychom mohli vyrovnat 5 stejných kláves (například mezer) vedle sebe a to nechceme. Myslím si, že mezi mezerami a stejnými znaky by měly být alespoň 2 až 3 znaky, ale zároveň být dostupně, proto jsem je rozmístil relativně po krajích, další jsou 4 e, ty rozmístíme podobně do čtverce. i, u, t, s mají 3 znaky tak je rozmístíme do něčeho co ideálně připomíná trojúhelník. poslední dvojice znaků dáme proti sobě do úhlopříček a poslední znaky dáme doprostřed. Vznikne toto:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	W	O	D	h	v	M	F	H
2	y	j	"""	s	i	"""	I	U
3	L	u	e	n	l	e	u	A
4	q	t	a	m	o	r	t	d
5	g	i	s	r	c	a	s	p
6	S	"""	e	l	n	e	"""	N
7	T	f	t	"""	u	i	C	Q
8	R	w	P	b	.	V	E	J

Co bych si rovnou vytkl je, že 14. nejčtenější znak dávám ještě na kraj, ale 13. je uprostřed, ale nevím jak tento nedostatek odstranit, ale celkově si

myslím, že to bude spíš z těch lepších rozvržení.

Určitě si ale myslím, že průměrně bude počet potřebných stisků okolo 4, jelikož to je přibližně největší vzdálenost, když se postavíme mezi 2 stejné klávesy. Proč? Jelikož se většinou budeme pohybovat ve středu klávesnice, kde je vysoká hustota čtených znaků a tím pádem nebudeme nikdy tak daleko od kláves jako „ “ atd. A dále budeme mít výlety na kraj klávesnice poměrně vyjímecné. Většinou se opět budeme zase vracet ke středu a navíc je poměrně velká šance, že pak bude nějaký znak, co je zde zastoupen vícekrát a docela solidní šance že jedna z těch kláves nebude daleko. Dále bych ještě podotkl, že ve středu je maximální vzdálenost k „ “ 3, ale máme i solidní šanci že to bude méně. U ostatních čtených znaků jako „e“, jsme na tom podobně. Proto si myslím, že počet stisků šipek by mohl být okolo 100 000. Jinak mimochodem, počet stisknutí klávesy Enter bude konstantní vždy tak jako tak a to 23 423.

11.4 M&M XXII. ročník; 6. série; 4. úloha

Určování polohy pomocí GPS je založeno na přesném měření času v družicích. Aby bylo určování přesné, je potřeba brát v úvahu i relativistické jevy, a to dilataci času. Odvodte, jak se změní frekvence signálu vysílaného družicí v důsledku obecné teorie relativity (tedy změny potenciálu gravitačního pole). Změní se frekvence i kvůli jinému jevu? Vysvětlete.

Přiznám se, že nejsem chodící encyklopedie (studium na MATFYZu mě teprve čeká), takže jsem si to musel vygooglit :D (Z paměti ty vzorečky fakt neznám :D)

Hodně se mi líbil článek na <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1644-chyby-a-relativisticke-korekce>

Nejprve změna potenciálu gravitačního pole:

$$\sqrt{1 - \frac{2\kappa M}{(R+r)c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2\kappa M}{Rc^2}}.$$

Za den tato chyba činí přibližně $45,7\mu\text{s}$.

Dále bude platit následující relativistický zákon (to že kvůli pohybu satelitu plyne čas jinou rychlostí):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3880}{3 \cdot 10^8}\right)^2}}$$

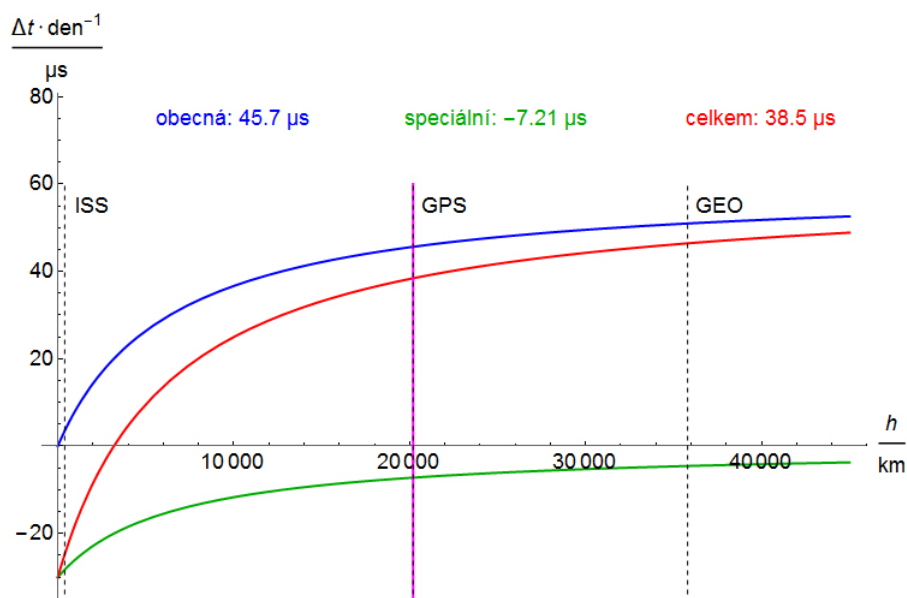
Dosaženou rychlost můžeme vygooglit nebo jednoduše dopočítat.

Jinak chyba za den by chyba byla $7,2\mu\text{s}$ a chyba určení polohy by díky tomuto jevu činila 2100 m.

Jelikož je ale změna času díky rychlosti záporná, tak celková změna bude: $45,7 - 7,2 = 38,5\mu\text{s}$

Krásně to můžeme vidět na ukradeném obrázku z již zmíněné stránky na začátku řešení²⁹.

²⁹<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1644-chyby-a-relativisticke-korekce>



Obrázek 7: Obrátek k relativistickým jevům, pro srovnání vyznačena ISS, GPS a GEO.

Abych opět ještě citoval internetové zdroje tak:

„Mezi další jevy, které způsobují další nepřesnosti při určování času, patří např.:

1. trajektorie satelitu při jeho pohybu kolem Země nemá přesně tvar kružnice (tj. nejedná se tedy přesně o pohyb po kružnici);

2. satelit se pohybuje zrychleným pohybem v gravitačním poli Země, která navíc rotuje;

Satelit se pohybuje po kružnici, má tedy nenulové dostředivé zrychlení; proto se pohybuje zrychleným pohybem.

3. elektromagnetické vlnění se pohybuje ze satelitu na Zem gravitačním polem, přičemž intenzita gravitačního pole směrem k Zemi roste - proto není stálá velikost rychlosti šíření tohoto vlnění;

4. elektromagnetické vlnění se nepohybuje k Zemi po úsečce, ale po zakřivené trajektorii.

Právě uvedené vlivy jsou ale oproti výše uvedeným vlivům zanedbatelné, a proto se další korekce při určování času neprovádějí.“ - konec citace³⁰

Dále ještě však ale musíme počítat s dalšími jevy kvůli tomu, že se satelit pohybuje po obloze, tak musíme počítat i s Doplerým jevem:

$$f = f_0 \frac{v}{v - v_{s,r}},$$

kde v je rychlost vln v dané látce a $v_{s,r}$ relativní radiální rychlost zdroje vůči pozorovateli (kladná rychlost znamená přibližování, záporná vzdalování).

Zajímavé je, že u geostacionárních družic (GEO) by tento problém nebyl.

Dále je zde ještě atmosféra, ta rovněž mění rychlost šíření signálu a jak bylo výše řečeno, zakřivuje ho.

Nakonec ještě může být nepatrná chyba na samotné družici, ale pouze malá, jelikož zde jsou atomové hodiny.

³⁰<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1644-chyby-a-relativisticke-korekce>

11.5 M&M XXII. ročník; 6. série; 5. úloha

Vymyslete nějaký „zákon zachování“, který neplatí, a popište situaci, kdy neplatí. Body dostanete dle náročnosti a originality.

Dva příklady jsou uvedeny už ve výchozím textu a to zákon zachování hmotnosti a zákon zachování mechanické energie.

Z wikipedie³¹:

Zákony zachování

U některých zákonů zachování nebylo nikdy pozorováno, že by byly (za nějakých speciálních podmínek) porušeny. Mezi takové zákony lze zařadit např.

Zákon zachování energie

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Zákon zachování elektrického náboje

Zákon zachování barevného náboje

Zákon zachování symetrie

Existuje také velká skupina zákonů, které jsou platné pouze za určitých podmínek (např. při nízkých rychlostech). Mezi takové zákony lze zařadit např.

Zákon zachování hmotnosti (platí pouze při nízkých rychlostech)

Zákon zachování baryonového čísla, leptonového čísla apod. (viz Zachovávající se veličiny základních interakcí)

Dále jsem se dočetl (odkázal se z tohoto článku), že pro slabou interakci se nezachovává podivnost, izospin I , složka izospinu I_3 , vůně a hypernáboj. Pro silnou interakci se nezachovává Izospin I (složka izospinu I_3 se však zachovává).

Co se týče zachování parit, tak se nezachovává P , C , T , CP u slabé interakce, ale CPT se zachovává.

Tudíž by neplatili zákony zachování těchto výše zvýšených veličin.

³¹https://cs.wikipedia.org/wiki/Zkon_zachovn

Dále jsem pokračoval vyrabováním anglické wikipedie³²:

Conservation of rest mass (zákon zachování hmotnosti)

Conservation of baryon number (See chiral anomaly) (baryonové číslo)

Conservation of lepton number (In the Standard Model) (leptonové číslo)

Conservation of flavor (violated by the weak interaction) (vůně)

Conservation of parity (parita)

Invariance under Charge conjugation (náboj - narušují slabé interakce)

Invariance under time reversal (časová symetrie - hlavně porušuje druhý termodynamický zákon)

CP symmetry, the combination of charge and parity conjugation (equivalent to time reversal if CPT holds) (toto mi není úplně jasné, ale co jsem se dočetl, tak důsledkem je porušení nějakého postulátu standardního modelu)

To by jako výčet mohlo stačit. Hledal jsem, proč neplatí zákon zachování baryonového číslo a dočetl jsem se následující: „Baryonové číslo by se mělo zachovávat v téměř všech procesech standardního modelu. Součet baryonového čísla všech částic vstupujících do reakce je stejný jako součet baryonového čísla částic v reakci vzniklých. Nicméně některé hypotetické procesy v částicové fyzice by měly baryonové číslo narušovat. Příkladem mohou být některé procesy v elektroslabé interakci, nejběžnějším příkladem je však rozpad protonu, který by měl narušovat baryonové i leptonové číslo. I přes veškerou snahu fyziků z Japonska, Kanady, USA i jiných zemí však dosud rozpad protonu nebyl pozorován. V současnosti je stanoven pouze dolní limit jeho poločasu přeměny.“ - což mi je poněkud dlouhé, ale nevím jak to zestručnit.

O leptonech jsem se na tuto tematiku dočetl obdobně: „Dnes víme, že ve Standardním modelu se leptonové číslo zachovává, pokud mají neutrina nulovou klidovou hmotnost. Byly však pozorovány neutrinové oscilace, které jsou vysvětlením dříve pozorovaného nízkého neutrinového toku ze Slunce. Víme proto, že každé z leptonových čísel se zachovává pouze přibližně. Zachovává se však jejich součet. Mělo by tak být možno pozorovat Teoreticky se uvažuje i o možnosti, že dochází k rozpadu protonu. V takovém případě by se nezachovávalo ani toto souhrnné leptonové číslo, ale ani baryonové číslo, které by při rozpadu kleslo z +1 na nulu. Pokusy na detektorech v

³²https://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_law

Japonsku nebo v Kanadě, jako je například Superkamiokande však prozatím neprokázaly, že by k takovému rozpadu docházelo.“

Tudíž oba zákony mají ledacos společného, třeba to že je porušuje rozpad protonu, který je zatím pouze teoreticky předpovězený.

Podivnost

Podivnost se mění se slabými interakcemi o ± 1 .

Izospin

V procesech elektromagnetické interakce se hodnota izospinu může zvýšit nebo snížit o jedničku.

Snažil jsem se najít ještě nějaké další informace, ale už jsem nebyl na tolik úspěšný, že by nalezený materiál přidal něco nového.

12 FYKOS XXIX. ročník 1. série

12.1 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 1. úloha

Při elektrolýze vody v Hofmannově přístroji je elektrolytem roztok kyseliny sírové ve vodě. Hmotnost kyseliny v roztoku je prakticky konstantní, ale jak již samotný název napovídá, voda se postupně rozkládá na vodík a kyslík. Tím se zvyšuje zastoupení kyseliny v roztoku. Za jak dlouho stoupne hmotnostní zlomek kyseliny v roztoku na dvojnásobek, pokud roztokem prochází proud $I = 1\text{ A}$, původní hmotnostní procento kyseliny bylo $w_0 = 5\%$ a objem roztoku v nádobě byl původně $V_0 = 2\text{ l}$?

Nejprve spočítáme kolik vody se musí rozložit, původní procento kyseliny je $w_0 = 5\%$ my chceme $w_1 = 10\%$. V_0 je roven 2 l. pokud je zastoupení kyseliny v roztoku na začátku 5%. Je hmotnost kyseliny 100 g. Těchto 100 g má tvořit 10%. Tudíž objem V_1 je roven 1 l. Musí se tedy elektrolýzou rozložit 1 l vody.

Dále víme, že proud $I = 1$ A. Víme, že hmotnost vyloučené látky lze spočítat jako $m = A \cdot I \cdot t$. A se dá spočítat jako $A = \frac{M_n}{Fv}$ Kde M_n je molární hmotnost látky, F je Faradyova konstanta ($= 96\,485 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$) a v je počet elektronů nutný k vyloučení 1 molekuly (té původní). Když si uděláme následující chemickou rovnici pro vylučování vody:



Jak vidíme, tak v tomto případě je v rovno 2. Ted' už musíme spočítat jen molární hmotnost vody a to je $M_n = 18 (1+1+16)$. Ted' můžeme vypočítat A :

$$A = \frac{M_n}{Fv} = \frac{18}{96\,485 \cdot 2} = 9,328 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1}$$

Nyní upravíme vzorec $m = A \cdot I \cdot t$ na $t = \frac{m}{A \cdot I}$:

$$t = \frac{m}{A \cdot I} = \frac{1}{9,328 \cdot 10^{-5} \cdot 1} \approx 10\,721 \text{ s} = 2,979 \text{ h}.$$

Délka celého procesu tedy bude 2 h 58 min 41 s.

12.2 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 2. úloha

Ve vlaku, který se může pohybovat po kolejích bez tření, stojí 2 lidé, každý s hmotností m . Kdy dosáhne vlak větší rychlosti? Když oba vyskočí z vlaku naráz, nebo když budou vyskakovat z vlaku postupně? Člověk vyskočí z vlaku relativní rychlostí u (rychlost vyskakujícího člověka vůči vlaku po výskoku).

Už ze zadání vidíme, že vztah od kterého se bude vše odvíjet je $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2$. Příklad, kdy budou oba vyskakovat naráz si označíme jako první a kdy postupně jako druhý.

Když někdo vyskočí z vlaku rychlostí u , tak mu dodá energii E_{vys} , pro kterou bude platit:

$$E_{vys} = \frac{1}{2}m \cdot u^2 \quad (26)$$

Tento vztah platí, jelikož rychlost se vztahuje k vlaku, ne k zemi(což nám situaci značně usnadňuje).

Když se podíváme na vztah pozorněji, všimneme si, že neobsahuje nic ohledně vlaku (v ; $m \dots$), což je logické, ale zmiňuji to zde, jelikož nám to umožní všimnout si zajímavého faktu a to, že vždy bude dodána vlaku energie $2E_{vys}$. Nejprve bude hmotnost $2 \times$ větší, tudíž $2E_{vys}$ bude $2 \times$ větší a poté bude celá energie E_{vys} dodána $2 \times$. Tudíž výsledná dodaná energie bude vždy $2E_{vys}$. Z toho vyplývá, že výsledná rychlost by měla být v obou případech stejná.

Nyní si to ještě můžeme ukázat trochu obecně:

Vlak nejprve pojede rychlostí v_1 a má hmotnost m_1 . Oba lidé mají hmotnost m_2 a vyskakují rychlostí u .

Nejprve případ, kdy vyskakují najednou:

$$E_{vl} = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2$$

$$E_{vys1} = \frac{1}{2}2m_2 \cdot u^2$$

$$E_1 = E_{vl} + E_{vys1}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m_1}}$$

A když se podíváme na druhý výskok (postupně):

$$E_{v2} = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2$$

$$E_{vys2.1} = \frac{1}{2}m_2 \cdot u^2$$

$$E_{vys2.2} = \frac{1}{2}m_2 \cdot u^2$$

$$E_1 = E_{vl} + E_{vys2.1} + E_{vys2.2}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{m_1}}$$

Když si to ale projdeme, zjistíme, že $E_{vys1} = E_{vys2.1} + E_{vys2.2}$, tudíž $E_1 = E_2$ a tudíž $v_1 = v_2$.

Nezávisí tedy na tom, jak budou osoby z vlaku vyskakovat, výsledná rychlost bude stejně vždy stejná.

12.3 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 3. úloha

Zlatá koule má na vzduchu hmotnost $m_1 = 96,25$ g. Při ponoření do vody je vyvážena závažím o hmotnosti $m_2 = 90,25$ g. Rozhodněte, zda je předmět dutý. Pokud ano, určete objem dutiny. Hustota zlata je $\varrho_{Au} = 19,25$ g · cm⁻³, hustota vody $\varrho_{H_2O} = 1,000$ g · cm⁻³. Tíhové zrychlení je $g = 9,81$ m · s⁻².

Známe tyto hodnoty:

$$m_1 = 96,25 \text{ g} = 0,09625 \text{ kg}$$

$$m_2 = 90,25 \text{ g} = 0,09025 \text{ kg}$$

$$\rho_{\text{Hg}} = 19,25 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 19\,250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Z těchto zadaných hodnot můžeme snadno spočítat objem koulí (jejich plných částí), který budeme dále potřebovat.

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_{\text{Hg}}} = \frac{0,09625}{19\,250} = 0,000005 \text{ m}^3$$

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_{\text{Hg}}} = \frac{0,09025}{19\,250} \approx 0,000004688 \text{ m}^3$$

Dále spočítáme síly F_1 a F_2 (ty budou rozdílem tíhových sil a vztlakových):

$$F_1 = F_{g1} - F_{vz1}$$

$$F_2 = F_{g2} - F_{vz2}$$

$$F_g = m \cdot g$$

$$F_{vz} = V \cdot \rho \cdot g$$

$$F_{t1} \approx 944,2 \text{ mN}$$

$$F_{vz1} \approx 49,1 \text{ mN}$$

$$F_1 \approx 895,2 \text{ mN}$$

$$F_{t2} \approx 885,3 \text{ mN}$$

$$F_{vz2} \approx 46 \text{ mN}$$

$$F_2 \approx 839,4 \text{ mN}$$

Když sečteme F_1 a F_2 , dostaneme hodnotu 1735 mN. Pokud však chceme aby celá soustava zůstala v klidu potřebujeme, aby $F_1 + F_2 = 0$. V kouli se tudíž musí nacházet dutina. Jelikož v zadání nebylo uvedeno čím by měla být případná dutina vyplněna, budu počítat, že uvnitř koule je vzduchoprázdno. Potřebujeme, aby dutina byla dostatečně velká, aby vyprodukovala sílu F_3 :

$$F_3 - (F_1 + F_2) = 0$$

$$F_3 = F_{vz} = V_3 \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g$$

My potřebujeme znát V_3 :

$$V_3 = \frac{F_{vz}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g} = \frac{F_1 + F_2}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g} = \frac{1735}{1\,000 \cdot 9,81} \approx 0,000177 \text{ m}^3$$

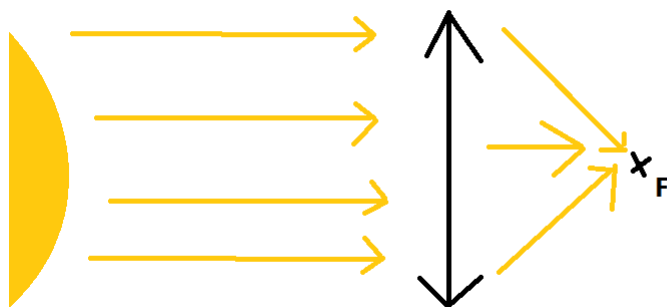
Koule v sobě tedy má dutinu o objemu 177 cm³.

12.4 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 4. úloha

Představte si, že kolem Slunce obíhá po kruhové dráze spojná čočka o průměru rovném slunečnímu průměru, jejíž ohnisko obíhá s dostatečnou přesností po oběžné dráze Země. Určete, jak moc čočka Zemi sežehne během jednoho svého oběhu (tj. kolik jí předá sluneční energie), bude-li obíhat kolem Slunce ve vzdálenosti Merkuru, a porovnejte tento výsledek se stavem, kdy bude obíhat ve vzdálenosti Venuše.

Bonus: Uvažujte navíc zatmění, které čočka při oběhu způsobí.

Nejprve si uděláme náčrtek:



Obrázek 8: Slunce, čočka, ohnisko, Země

Jak můžeme z náčrtku 8 vidět, nalevo máme Slunce, z něho vychází paprsky, které prochází přes čočku a všechny se scházejí v ohnisku F, které se zároveň shoduje s oběžnou dráhou Země. Předpokládáme, že všechny dráhy jsou kruhové.

Začneme tím, že si sepíšeme všechny nám dostupná data:

o značí vzdálenost od středu Slunce (Oběžná dráha); v je normálně rychlost;

$o_m = 5,730 \cdot 10^{10} \text{ m}$ poloměr oběžné dráhy Merkuru

$o_v = 1,082 \cdot 10^{11} \text{ m}$ poloměr oběžné dráhy Venuše

$o_z = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ poloměr oběžné dráhy Země

$v_m = 5,730 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}$ rychlost Merkuru

$v_v = 3,502 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}$ rychlost Venuše

$v_z = 2,978 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}$ rychlost Země

$r_z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ poloměr Země

$r_s = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$ poloměr Slunce

$P = 6,3 \cdot 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$... energie (světelná) vycházející z 1 m^2 slunce

$S = 4\pi r^2$ vzoreček na výpočet povrchu koule

$S = 2\pi r^2$ vzoreček na výpočet povrchu polokoule

r klasicky poloměr.

V indexech: m Merkur; v Venuše; z Země; c čočka; vpm plocha polokoule o poloměru oběžné dráhy Merkuru (vp jako virtuální polokoule); p výkon; eS efektivní plocha; zuh úhel země; zz zatmění země.

Dále si sepíšeme další zjednodušení, které provedeme, s čočkou budeme počítat jako s plackou v tvaru kruhu a průměru Slunce. Se zemí budeme rovněž počítat jako s plackou, počítáme s tím, že všechny dráhy jsou kruhové, některé malé úhly zcela zanedbáváme.

Nyní budeme počítat jakou energii předá čočka do svého ohniska během sekundy. K tomu nejprve musíme znát plochu čočky, plochu země počítáme pro pozdější účely.

$$S = \pi r^2$$

$$S_c = \pi r_s^2 \approx 1,523 \cdot 10^{18} \text{ m}^2$$

$$S_z = \pi r_z^2 \approx 1,275 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$$

Tyto předměty tedy mají nějakou plochu, jaké procento plochy však budou zabírat na obloze? 1 m^2 vyzáří nějakou energii, tato energie směřuje nahoru a do stran, dolů však ne. Když budeme počítat jak se z určitého bodu na Slunci šíří energie do vesmíru a jaká energie zasáhne určitý objekt musíme znát relativní plochu, kterou zabírá objekt z pohledu určitého bodu na Slunci. Spočítáme tedy plochu polokoulí s poloměrem námi počítaných objektů. (Zemi opět počítám pro pozdější účely):

$$S = 2\pi r^2$$

$$S_{vpm} = 2\pi r_m^2 \approx 2,063 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$$

$$S_{vpv} = 2\pi r_v^2 \approx 7,357 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$$

$$S_{vpz} = 2\pi r_z^2 \approx 1,406 \cdot 10^{23} \text{ m}^2$$

Nyní spočítáme jaký poměr bude čočka z oblohy zabírat. Poslední poměr vyjadřuje jakou plochu zabírá na obloze Země:

$$\eta_{vpm} = \frac{S_c}{S_{vpm}} \approx 7,383 \cdot 10^{-5}$$

$$\eta_{vpv} = \frac{S_c}{S_{vpv}} \approx 2,070 \cdot 10^{-5}$$

$$\eta_{vpz} = \frac{S_c}{S_{vpz}} \approx 9,068 \cdot 10^{-10}$$

A nyní budeme počítat jakou energii Slunce vyzáří, jelikož vidíme pouze polokouli, spočítáme plochu této polokoule a jakou produkuje energii.

$$2S = \pi r^2$$

$$S_{ps} = 2\pi r_s^2 \approx 3,044 \cdot 10^{18} \text{ m}^2$$

$$P_s = S_{ps} \cdot P \approx 1,918 \cdot 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

A když nyní vynásobíme tento údaj námi zjištěnými poměry (efektivity),

zjistíme kolik slunečního záření dopadne na čočku (ta ho všechno zkoncentruje na Zemi), popřípadě Zemi.

$$P = P_s \cdot \eta$$

$$P_m = P_s \cdot \eta_{vpm} \approx 1,416 \cdot 10^{22} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$P_v = P_s \cdot \eta_{vpv} \approx 3,970 \cdot 10^{21} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$P_z = P_s \cdot \eta_{vpz} \approx 1,739 \cdot 10^{17} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

Když nyní známe energii která se koncentruje v ohnisku čočky, spočítáme, jak dlouho bude ohnisko čočky přecházet přes Zemi. Nejprve potřebujeme znát délku oběžné dráhy, známe rychlost oběhu, tudíž budeme moci snadno spočítat délku oběhu a z této délky oběhu pak už bude pouze krůček k úhlové rychlosti:

$$d = 2\pi o$$

$$d_{om} = 2\pi o_m \approx 3,6 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$d_{ov} = 2\pi o_v \approx 6,8 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$d_{oz} = 2\pi o_z \approx 9,4 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$t = \frac{d}{v}$$

$$t_m = \frac{d_m}{v_m} \approx 6,283 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$t_v = \frac{d_v}{v_v} \approx 1,942 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$t_z = \frac{d_z}{v_z} \approx 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi}{t_m} \approx 1,000 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_v = \frac{2\pi}{t_v} \approx 3,235 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_z = \frac{2\pi}{t_z} \approx 1,991 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Potřebujeme však znát ještě jednu poslední věc a to, jaký úhel zabírá Země na oběžné dráze a jaký úhel oběžné dráhy je zakryt zatměním (tady je asi největší zanedbání v celých mých výpočtech a to, že zanedbávám částečné zatmění):

$$\omega_{zuh} = \frac{2r_z}{d_{oz}} \cdot 2\pi \approx 8,516 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\omega_{zz} = \frac{2r_s}{d_{oz}} \cdot 2\pi \approx 9,304 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Nyní zjistíme čas podle následujícího vzorce: $t = \frac{\omega_{zuh}}{\omega_z - \omega_{m/v}}$. Když chceme

spočítat jak dlouho bude Země bez světla, ω_{zuh} nahradíme ω_{zz} a pokud budeme počítat s tím, že čočka a Země nebudou obíhat Slunce ve stejném, ale opačném směru $\omega_z - \omega_{m/v}$ nahradíme $\omega_z + \omega_{m/v}$: $t_{m1} = \frac{\omega_{zuh}}{\omega_z - \omega_m} \approx 106 \text{ s}$

$$t_{mz1} = \frac{\omega_{zz}}{\omega_z - \omega_m} \approx 11617 \text{ s}$$

$$t_{v1} = \frac{\omega_{zuh}}{\omega_z - \omega_v} \approx 688 \text{ s}$$

$$t_{vz1} = \frac{\omega_{zz}}{\omega_z - \omega_v} \approx 74791 \text{ s}$$

$$t_{m2} = \frac{\omega_{zuh}}{\omega_z + \omega_m} \approx 79 \text{ s}$$

$$t_{mz2} = \frac{\omega_{zz}}{\omega_z + \omega_m} \approx 7\,759\text{ s}$$

$$t_{v2} = \frac{\omega_{zvh}}{\omega_z + \omega_v} \approx 163\text{ s}$$

$$t_{vz2} = \frac{\omega_{zz}}{\omega_z + \omega_v} \approx 17803\text{ s}$$

Když se v indexu vyskytuje 1, tak čočka letí ve stejném směru jako Země, případě 2 ve směru opačném. Jestliže se vyskytuje v indexu z jedná se o dobu zatmění Země.

Když teď známe jakou energii čočka za sekundu koncentruje čočka v ohnisku a čas přechodu ohniska přes Zemi i dobu zatmění Země, vynásobíme tyto dvě hodnoty a zjistíme jakou energii čočka Zemi předá.

$$E = P \cdot t$$

$$E_{m1} = P_m \cdot t_{m1} \approx 1,501 \cdot 10^{24}\text{ J}$$

$$E_{mz1} = P_z \cdot t_{mz1} \approx 2,020 \cdot 10^{21}\text{ J}$$

$$E_{v1} = P_v \cdot t_{v1} \approx 2,731 \cdot 10^{24}\text{ J}$$

$$E_{vz1} = P_z \cdot t_{vz1} \approx 1,301 \cdot 10^{22}\text{ J}$$

$$E_{m2} = P_m \cdot t_{m2} \approx 1,119 \cdot 10^{24}\text{ J}$$

$$E_{mz2} = P_z \cdot t_{mz2} \approx 1,349 \cdot 10^{21}\text{ J}$$

$$E_{v2} = P_v \cdot t_{v2} \approx 6,471 \cdot 10^{23}\text{ J}$$

$$E_{vz2} = P_z \cdot t_{vz2} \approx 3,096 \cdot 10^{21}\text{ J}$$

Pokud se tedy podíváme na výsledky, zjistíme zaprvé, že energie předaná čočkou je vždy minimálně $200\times$ větší než ztráta způsobená zatměním. Pro zpracování výsledků (škod) můžeme tuto hodnotu zanedbat, jelikož celkové důsledky zmírní naprosto minimálně. Dále se dá skutečně říct, že by čočka Zemi skutečně sežehla. Větší energii čočka předá, když je ve vzdálenosti Venuše, sice nepředává tolik energie během jedné s , působí však výrazně déle a tudíž výsledná energie je skoro $2\times$ větší. Dále jak se dá logický předpokládat tak když letěla Země a čočka v opačném směru, tak byla předaná energie menší. Jinak jak vidíme, nárůst energie je opravu razantní, například jeden přechod čočky u Venuše dodá Zemi energii srovnatelnou 5 let normálního záření a u Venuše dokonce 10 let!

Přinejmenším by se Země ohrála o několik $^{\circ}\text{C}$ (globálně), spíše ale desítek či stovek, což by znamenalo katastrofu. Dále by na místě kde by se energie koncentrovala mohly vzniknout velké teploty a pravděpodobně by podle mého názoru mohlo dojít i termojaderné fúzi a explozi celé atmosféry. Oproti tomu by byla obě zatmění (před a po) o délce až 10 hodin svým efektem zanedbatelná.

12.5 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; 5. úloha

Pokud by někdo snědl 5 μg izotopu cesia ^{137}Cs , za jak dlouho bude mít v těle pouze 0,04 % původního množství částic tohoto izotopu? Předpokládejme, že cesium ^{137}Cs má poločas rozpadu 30,42 let a jeho biologický poločas (tedy doba, za kterou se z těla vyloučí právě polovina původního množství látky) je přibližně 15 dní. Zjistěte také, kolik částic se do té doby stihne v těle radioaktivně rozpadnout.

Známe tyto hodnoty:

$$m = 5 \mu\text{g} \text{ (izotopu cesia } ^{137}\text{Cs)}$$

$$c_2 = 0,04\% = 0,0004$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 30,42 \text{ let} \approx 11\,111 \text{ dnu}$$

$$B_{\frac{1}{2}} = 15 \text{ dnu}$$

Z těchto údajů vyplývá, že za den se z těla vyloučí $\frac{1}{15}$ atomů ^{137}Cs a rozpadne se $\frac{1}{11\,111}$ atomů ^{137}Cs . Z těchto čísel vidíme, že většina atomů se ztratí tak, že budou prostě vyloučeny. Tento fakt můžeme zapsat takto: $T_{\frac{1}{2}} \gg B_{\frac{1}{2}}$.

Rozhodl jsem se proto, že při výpočtu rozpadající se atomy zanedbám. Koncentrace c_2 atomů ^{137}Cs musí klesnout na 0,04 %. Tudíž $(1 - \frac{1}{15} - \frac{1}{11\,111})^n = \frac{155\,539}{166\,665}^n = 0,0004$.

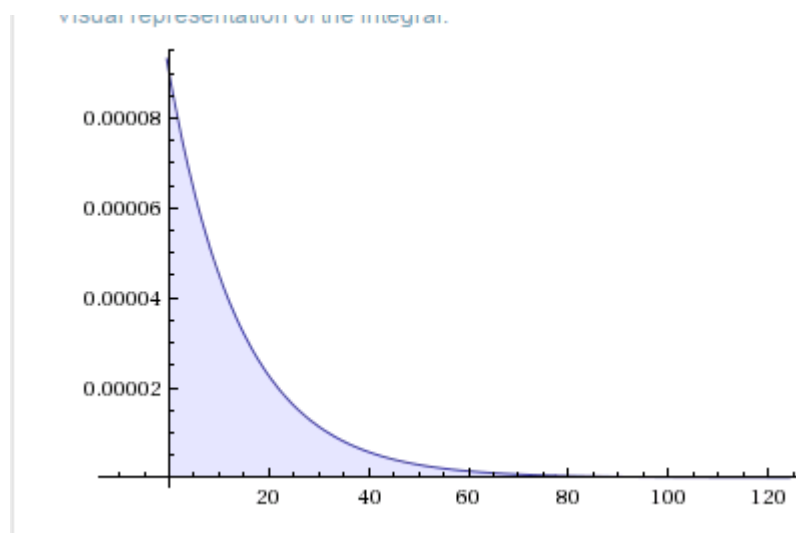
$$\begin{aligned} \frac{155\,539}{166\,665}^n &= 0,0004 \\ n \log \frac{155\,539}{166\,665} &= \log 0,0004 \\ n &= \frac{\log 0,0004}{\log \frac{155\,539}{166\,665}} \\ n &= 113,25 \text{ dni} \end{aligned}$$

Za tuto dobu tedy klesne hladina atomů v těle na 0,04%. A to kolik částic se stihne rozpadnout v těle vypočítáme integrálem. Nejprve však potřebujeme funkci a ta nám bude vyjadřovat, kolik atomů se v těle rozpadne. Pokud se v těle rozpadne za den $\frac{1}{11\,111}$ všech atomů a funkce jenž nám vyjadřuje počet atomů v těle je $\frac{155\,539}{166\,665}^n$ pak hledaná funkce f_x je $f_x = \frac{1}{11\,111} \cdot \frac{155\,539}{166\,665}^n$

$$\int_0^{113,25} f_x dx \quad (27)$$

$$\int_0^{113,25} \frac{1}{11\,111} \cdot \frac{155\,539}{166\,665}^n dx \quad (28)$$

Bohužel, Integrál se mi vypočítat nepovedlo. Proto alespoň přikládám obrázek 9 z <http://www.wolframalpha.com/>, jak je vidět, pro 0 nabývá hodnoty přibližně 0,000085 a pro 113,25 se hodnoty blíží 0. Tudíž integrál má vyjít přibližně 0,000085, což je však pouze jaký zlomek atomů se rozpadne. atomy ^{137}Cs mají hmotnost 136,907 u. 1 u = $1.661 \cdot 10^{-27}$ kg. 1 atom má tedy hmotnost $m = 2,273 \cdot 10^{-25}$ kg. $m = 5 \mu\text{g}$ je 0,000005 kg = $5 \cdot 10^{-6}$ kg. 0,04% z této hmotnosti je $2 \cdot 10^{-9}$ kg. Tuto hmotnost ještě musíme vynásobit



Obrázek 9: Integrál

výsledkem našeho integrálu, pak dostaneme hodnotu: $1,7 \cdot 10^{-13}$ kg. Pokud tuto hmotnost vydělíme vahou 1 at, dostaneme počet atomů: $7,479 \cdot 10^{11}$ atomů. 99,96% atomů se tedy vyloučí během 113,25 dnů a za tu dobu se v těle stihne rozpadnout $7,479 \cdot 10^{11}$ atomů. Tento výsledek můžeme díky nepřesnosti výpočtu integrálu zaokrouhlit na $7,5 \cdot 10^{11}$ atomů.

Níže je můj pokus o integrování, píše to zde spíše jen proto, že bych rád věděl, kdy jsem udělal chybu, za její případné najetí děkuji :-).

$$\frac{1}{11\,111} \int_0^{113,25} \frac{155\,539^n}{166\,665} dx \quad (29)$$

$$F_x = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{155\,539^n}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C \right) \quad (30)$$

$$x = F_0 - F_{113,25} \quad (31)$$

$$F_0 = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{155\,539^0}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C \right) \quad (32)$$

$$F_{113,25} = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{155\,539^{113,25}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C \right) \quad (33)$$

$$x = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{\frac{155\,539^0}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C \right) - \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{\frac{155\,539^{113,25}}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C \right) \quad (34)$$

$$x = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\left(\frac{\frac{155\,539^0}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C \right) - \left(\frac{\frac{155\,539^{113,25}}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C \right) \right) \quad (35)$$

$$x = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{\frac{155\,539^0}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} + C - \frac{\frac{155\,539^{113,25}}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} - C \right) \quad (36)$$

$$x = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{\frac{155\,539^0}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} - \frac{\frac{155\,539^{113,25}}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} \right) \quad (37)$$

$$x = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{\frac{155\,539^0}{166\,665} - \frac{155\,539^{113,25}}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} \right) \quad (38)$$

$$x = \frac{1}{11\,111} \cdot \left(\frac{1 - \frac{155\,539^{113,25}}{166\,665}}{\ln \frac{155\,539}{166\,665}} \right) \quad (39)$$

12.6 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; P úloha

Jistě jste někdy slyšeli (alespoň třeba ve filmu) o tom, že je nebezpečné se potápět ve velkých hloubkách a ihned poté cestovat letadlem. Pokud člověk toto udělá, hrozí mu tzv. dekompresní nemoc. Popište co nejpřesněji, jaké fyzikální procesy v lidském těle při této „nemoci“ probíhají (jak přesně obecné fyzikální zákony v tomto konkrétním případě působí) a proč jsou pro člověka nebezpečné. Je pro lidi nebezpečná i opačná posloupnost akcí, tedy cestování letadlem a následné potápění? (Při řešení můžete využívat všechny dostupné zdroje informací, ale následně musíte problém popsat vlastními slovy!)

O tomto tématu jsme již věděl něco dříve (knihy, dokumentární filmy, škola), proto nejsem schopen zde uvést všechny zdroje. Nejvíce mi však při aktuálním vyhledávání posloužili tyto zdroje:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Dekompresni_nemoc [1]

https://cs.wikipedia.org/wiki/Henryho_zakon [2]

https://en.wikipedia.org/wiki/Decompression_sickness [3]

<https://ru.wikipedia.org/wiki/azbuka> [4]

<http://www.aquatic7.cz/medicina10.html> [5]³³³⁴

Snížení tlaku způsobí, že plyn, který byl doposud pod tlakem (rozpuštěný v krvi, tkáních) se začne uvolňovat. Z uvolněného plynu se začnou tvořit bublinky (homogenní směs přestává být homogenní). Tyto bublinky se mohou začít formovat na libovolném místě, kde dojde k poklesu tlaku. Bublinky mohou fyzicky narušit tkáň (mozek) nebo ucpat cévy (embólie(plíce, srdce, mozek)). To může mít trvalé následky nebo dokonce smrt. Bublinky často bývají tvořeny dusíkem. ([1], [3], [5])

Bublinky vznikají takto:

Množství plynu, rozpuštěného v kapalině závisí na tlaku plynu na povrchu kapaliny. Pokud je tlak vzduchu v pořádku (nijak razantně se nemění). Hladina rozpuštěného plynu v krvi je normální a nic zásadního se nemění (v našem případě sledujeme především rozpuštěný dusík (ten dělá často největší problémy), ale když řekneme, že hlídáme hladinu plynu, chybu neuděláme). V případě, že se tlak na kapalinu začne měnit, začne se plyn z kapaliny uvolňovat (vypařovat) v případě člověka toto proběhne na jediném místě, kde se krev střetává se vzduchem a to jsou plíce. Plíce však mají jen omezené možnosti a plyn se může z krve odpařovat pouze nějakým maximálním objemem na nějaký čas. V případě, že pokles tlaku je tak prudký a tak velký, že plíce nejsou schopny v ten moment odvádět dostatek odpařeného plynu, plyn si najde jiný způsob a to, že se začne uvolňovat rovnou v krvi (obdobný proces můžeme samozřejmě vidět i kapalin jiných než krev i mimo člověka). Krev začne vřít. Přiblížit si můžeme tento proces i v naší kuchyni,

³³chtěl bych se omluvit za jednu drobnou chybu, ale nepodařilo se mi nijak rozumně dostat adresy z webu cs.wikipedia.org, jelikož adresy po zkopírování často obsahují % a ty se mi nepodařilo v \url{} vysázet samostatně a druhá způsob obsahuje znaky s čárkou (á, í...), které se mi rovněž nepodařilo vysázet. Tudíž většina adres není úplně správně napsána.

³⁴([1], [3], [5]) Znamená jaké zdroje byly použity (volný překlad, část informace, nezávislé potvrzení, zjednodušení textu (vlastní slova)...)

dáme hrnec na plotnu a zapneme jí, nejprve se vodní pára uvolňuje pouze z hladiny. Po překročení určité hranice, se však začnou vytvářet bublinky přímo v objemu hrnce. Zatímco v hrnci tyto bublinky prostě utečou, v těle to nejde (jde, ale pomalu), většina bublinek je moc velkých na to aby mohly být vyloučeny přes plíce a tak zůstávají v krevním řečišti (nebo jich je tolik, že to přes sklípky prostě nestíhají). Bublinky se přichycují na destičky a červené krvinky a lepí je dohromady (vzniká tromb). Jak už trochu vyplývá z předchozí věty, často se stane to, že bublinky jsou větší než plicní sklípky, pak často následuje ucpání plicního klípku. Bublinka ale může vzniknout i na jiném nevhodném místě a ucpat žilku na srdci nebo mozku. . . (stav se nazývá trombóza) Bublinky mohou rovněž vznikat i mimo krevní řečiště, všude tam, kde je až příliš malý tlak. [4]

Názorné příklady, rady, zajímavosti. . .

V hloubce 20 m je tlak 3 at, to znamená, že v krvi bude rozpuštěno $3\times$ více dusíku (samozřejmě až po nějakém času) ([4])

Rychlost výnoru by neměla být větší než $18 \text{ m}\cdot\text{min}^{-1}$. [4]

Dusík se ukládá v krvi a tkáních postupně, tudíž rychlost vynořování je ovlivněna i dobou strávenou pod vodou a hloubkou. ([1], [3], [4], [5])

Můžeme použít směsy vzduchu obsahující menší podíl dusíku.([1], [3], [4], [5])

Musíme si dávat pozor zda nejsme riziková skupina (staří lidé, nemocní, astmatici. . .) ([1], [3], [4], [5])

Fy zákony:

sledujme zde závislost varu kapaliny a rozpustnosti plynů v kapalině v závislosti na vnějším tlaku.

12.7 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; E úloha

Změřte místní tíhové zrychlení alespoň dvěma odlišnými metodami. Tyto metody následně zevrubně porovnejte.

Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo tvoří hmotný bod zavěšený na nehmotném závaží

Pro periodu T matematického kyvadla délky l platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (40)$$

Perioda T je doba jednoho kmitu.

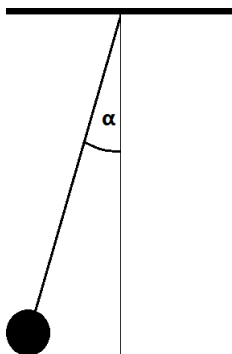
$$T = 2\tau \quad (41)$$

(τ je doba jednoho kyvu)

Ve vztahu pro periodu dostaneme:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{\pi^2 l}{\tau^2} \quad (42)$$

Matematické kyvadlo realizujeme závažím zavěšeným na tenkém vlákně.



Obrázek 10: $\alpha < 15^\circ$ (Při větším úhlu by vznikaly větší nepřesnosti.)

Náš předpoklad je $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Při měření jsem použil:
stojan s držákem, kovovou kuličku, tenké vlákno, metr, stopky

Naměřené hodnoty byly následující:

i	$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{10\tau}{\text{s}}$	$\frac{\tau}{\text{s}}$	$\frac{g_1}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$	$\frac{\Delta g_1}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$
1	0,5	7,08	0,708	9,84	0,03
2	0,6	7,78	0,778	9,78	0,03
3	0,7	8,39	0,839	9,81	0,00
4	0,8	8,98	0,898	9,79	-0,02
5	0,9	9,53	0,953	9,78	-0,03
6	1	10,02	1,002	9,83	0,02
7	1,1	10,54	1,054	9,77	-0,04
8	1,2	10,96	1,096	9,86	0,05
9	1,3	11,47	1,147	9,75	-0,06
10	1,4	11,81	1,181	9,91	0,09
Σ				98,14	0,38
$\emptyset$				9,81	0,04

$$g_1 = (9,81 \pm 0,04) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (43)$$

$$\delta g_1 = \frac{\Delta g_1}{g_1} = \frac{0,04}{9,81} \approx 0,4\% \quad (44)$$

Měření tíhového zrychlení z doby volného pádu

Když upustíme těleso, tak dráhu spočítáme jako dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \quad (45)$$

V našem případě se $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tudíž a vyjádříme jako:

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad (46)$$

V našem případě by se mělo $a = g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Při měření jsem použil:
kovovou kuličku, metr, stopky

Naměřené hodnoty byly následující:

i	$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{g_2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$	$\frac{\Delta g_2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$
1	1,5	0,58	8,90	-1,00
2	1,7	0,59	9,75	-0,14
3	1,9	0,58	11,44	1,54
4	2,1	0,68	9,13	-0,77
5	2,3	0,65	10,89	1,00
6	2,5	0,76	8,62	-1,27
7	2,7	0,70	10,97	1,07
8	2,9	0,79	9,28	-0,61
9	3,1	0,75	11,13	1,24
10	3,3	0,86	8,84	-1,06
Σ			98,95	9,70
$\emptyset$			9,89	0,97

$$g_2 = (9,89 \pm 0,97) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (47)$$

$$\delta g_2 = \frac{\Delta g_2}{g_2} = \frac{0,97}{9,89} \approx 9,8\% \quad (48)$$

Závěr:

Předpokládaná hodnota gravitačního zrychlení byla $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Nám vyšlo $g_1 = 9,81 \pm 0,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $g_2 = 9,89 \pm 0,97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (přesnosti měření byly $\delta g_1 \approx 0,4\%$ a $\delta \approx 9,8\%$). Pokud bychom tedy měli porovnat způsoby měření, už na první pohled vidíme, že přesnější byl ten první, to především proto, že námi měřený časový úsek byl delší tudíž námi způsobené časové chyby se tak neprojeví (stejně tak jako technická omezení stopek). V druhém případě bychom mohli zvětšit měřenou dráhu, pak by se ale projevilo tření, což by výsledek taktéž značně znepřesnilo. Když už jsme se dostali k tření, tak si myslím, že první měření bylo třením ovlivněno pouze minimálně, zatímco to druhé mohlo být ovlivněno třením o něco více. Pokud bych si tedy měl vybrat které měření použiji, abych dostal přesnější hodnotu, použil bych mezi matematického kyvadla.

12.8 FYKOS XXIX. ročník; 1. série; S úloha

a. Na rozehrání a seznámení se s čísly zjistěte, do jaké výšky byste mohli zdvihnout průměrného člověka (70 kg), využijete-li celou energii běžné tyčinky Mars (okolo 250 Cal pro 50 g tyčinku). Také vypočtete, jaká energie je kBT při pokojové teplotě a vyjádřete ji také v elektronvoltech (pokud neznáte takovou jednotku energie, vězte, že je to energie, kterou získá elektron při urychlení na rozdílu potenciálů 1 V, a číselně $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

b. Se stavovou rovnicí se dá hodně cvičit. Když namísto počtu částic použijete molární množství n , dostanete

$$pV = nN_A k_b T$$

kde se součin $N_A k_b T$ značí R a nazývá se univerzální plynová konstanta. Určete její hodnotu. Také dále upravte stavovou rovnici do tvaru, ve kterém se vyskytuje hmotnost plynu, a potom do tvaru obsahujícího hustotu plynu.

c. Určete objem molu plynu při pokojové teplotě. Toto číslo je užitečné znát z paměti.

d. Nakonec trochu úvahová úloha. Povšimněte si, že v diskusi o práci ideálního plynu jsme automaticky použili tlak plynu. Zkuste sebe a mě přesvědčit, že je to ten správný tlak – já bych totiž namítal, že jsme mohli použít okolní tlak nebo dokonce rozdíl tlaků vně a uvnitř. Hodnocení této části bude mírné, nebojte se zamyslet a napsat cokoli, na co přijdete.

1.1)

$$1 \text{ cal} \approx 4185 \text{ J} = c$$

$$n = 250 \text{ cal}$$

$$m_{\text{tycinka}} = 50 \text{ g} = 0,05 \text{ kg}$$

$$m_{\text{clovek}} = 70 \text{ kg}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$E_c = E_p$$

$$c \cdot n = m_{\text{clovek}} \cdot h \cdot g$$

$$h = \frac{c \cdot n}{m_{\text{clovek}} \cdot g}$$

$$h = \frac{4185 \cdot 250}{70 \cdot 9,81} \approx 1524 \text{ m}$$

1.2)

Nejprve musíme spočítat součin $k_B T$ (T je pokojová teplota)

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$t = 20^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K}$$

$$E = k_B \cdot T$$

$$E = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293,15$$

$$E = 4,05 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Dále víme, že $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Energie $k_B T$ je tedy při pokojové teplotě $\frac{4,05 \cdot 10^{-21}}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 0,025 \text{ eV}$.

2.1)

Stavovou rovnici $pV = k_B N T$ si upravíme do tvaru $pV = n N_A k_B T$ a nás bude zajímat součin $N_A k_B$ jenž lze rovněž označit jako R . N_A je Avogadrova konstanta a má hodnotu $6,022140857 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Násobíme 2 konstanty, R se tudíž vždy rovná: $R \approx 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \approx 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2.2)

Abych do stavové rovnice dostal hmotnost plynu, požiji na začátek základní tvar stavové rovnice: $pV = k_B N T$. N je počet částic, pokud si zavedeme další proměnnou (označme si ji m_{1castice}), která bude vyjadřovat hmotnost 1

částice v případě, že všechny částice budou mít stejnou hmotnost (v případě, že všechny částice nebudou mít stejnou hmotnost bude vyjadřovat hmotnost průměrnou). Z toho vyplývá, že součin $N \cdot m_{1\text{ částice}}$ (počet částic · hmotnost 1 částice) bude vyjadřovat hmotnost plynu. Celý tento postup můžeme zapsat takto:

$$\begin{aligned} pV &= k_B NT \\ pV m_{1\text{ částice}} &= k_B NT m_{1\text{ částice}} \\ m &= N m_{1\text{ částice}} \\ pV m_{1\text{ částice}} &= k_B T m \\ m &= \frac{pV m_{1\text{ částice}}}{k_B T} \end{aligned}$$

2.3)

K následujícímu úkolu můžeme využít nám již známé vyjádření: $m = \frac{pV m_{1\text{ částice}}}{k_B T}$. Víme, že $\rho = \frac{m}{V}$. ρ plynu si tedy vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} m &= \frac{pV m_{1\text{ částice}}}{k_B T} \\ \rho &= \frac{m}{V} \\ \rho &= \frac{\frac{pV m_{1\text{ částice}}}{k_B T}}{V} \\ \rho &= \frac{p m_{1\text{ částice}}}{k_B T} \\ \rho &= \frac{p m_{1\text{ částice}}}{k_B T} \end{aligned}$$

Jak vidíme, tak ze stavové rovnice nám krásně vypadl objem; hustotu plynu tedy spočítáme: $\rho = \frac{p m_{1\text{ částice}}}{k_B T}$.

3)

Opět budeme vycházet ze stavové rovnice: $pV = k_B NT$. Tu si upravíme tak, že nám bude vyjadřovat objem: $V = \frac{k_B NT}{p}$.

$$k_B \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$N = 1 \text{ mol} = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ atomu}$$

$$t = 20^\circ \text{C}$$

$$T = 293,15 \text{ K}$$

$$N = 101\,325 \text{ Pa}$$

Stačí tedy pouze dosadit do vzorečku (můžeme si povšimnout toho, že $k_B N$

by šlo rovněž nahradit R):

$$V = \frac{k_B N T}{p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 293,15}{101\,325} \approx 0,024 \text{ m}^3 = 24 \text{ l}.$$

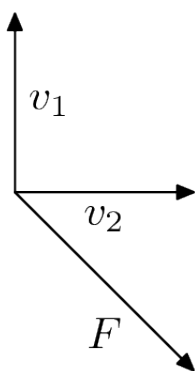
Pokud by nás zajímalo, proč se toto číslo neshoduje s objemem molu ideálního plynu (22,4 l), tak je to proto, jelikož tato konstanta je definována pro $t = 0^\circ\text{C}$ ($T = 273,15 \text{ K}$), zatímco by jsme spočítali s pokojovou teplotou (A já mám v pokoji přibližně 20°C).

13 FYKOS XXIX. ročník 2. série

13.1 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 1. úloha

Na ledě běží potkan rychlostí v . Najednou se rozhodne, že se chce otočit o 90° tak, aby po otočení běžel pořád rychlostí o velikosti v , ale v novém směru. Jaký nejmenší čas na to potřebuje? Předpokládejte, že potkaní nožičky se mohou po ledě pohybovat nezávisle; koeficient tření mezi nožičkami a ledem je f .

Budu předpokládat, že potkan je hmotný bod pohybující se po ledě, schopný vyvíjet konstantní sílu F daným směrem. Pokud chceme, aby zatočil o 90° nějakým směrem, musíme provést vlastně 2 operace: Zastavit ho v jednom směru a urychlit v druhém. Pokud bychom si to zanesli do kartézské soustavy souřadnic, umístíme v_2 na x a v_1 na y , potřebujeme pak, aby po rozkladu vektoru F dostali stejné vektory na x -ové ose i na y -ové ose. Navíc y -ová složka musí být opačná k v_1 a x -ová musí být souhlasná s v_2 . Viz náčrtek:



Obrázek 11: vektory $v_1; v_2$ ($v_1 = v_2$) a F

Dále víme, že mezi potkanem a ledem je smykové tření f . A dále je nám známo, že $F_t = f \cdot F_g$. A $a = \frac{F}{m}$; $v = a \cdot t$ Z toho vyplývá: $v = \frac{F}{m} \cdot t$. To můžeme upravit na: $t = \frac{v \cdot m}{F}$ Nyní sílu nahradíme třecí silou, co produkuje potkan: $t = \frac{v \cdot m}{f \cdot F_g} \rightarrow t = \frac{v \cdot m}{f \cdot m \cdot g} \rightarrow t = \frac{v}{f \cdot g}$. To by byl výsledek, kdybychom chtěli aby potkan zastavil, jelikož nám však síla působí pod nějakým úhlem (jak bylo výše odvozeno), musíme ještě celý čas vynásobit $\sqrt{2}$. Tudíž:

$$t = \sqrt{2} \cdot \frac{v}{f \cdot g} \quad (49)$$

13.2 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 2. úloha

Občas nastane stav, kdy je nominální hodnota mincí nižší, než jejich výrobní náklady. Mějme dvě mince vyrobené ze slitiny zlata a stříbra. První má průměr $d_1 = 1$ cm, druhá $d_2 = 2$ cm, obě mají tloušťku $h = 2$ mm. Menší mince při ponoření do nádoby se rtutí klesne ke dnu, zatímco větší mince se začne vynořovat. Ponoříme-li do rtuti obě mince, menší na větší, budou se v kapalině vznášet. Určete, kolik hmotnostních procent stříbra obsahuje větší mince, jestliže menší je celá zlatá.

Bonus: Jak se změní výsledek úlohy, pokud menší mince může obsahovat i stříbro?

Důležité údaje:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 1 \text{ cm} &= 0,01 \text{ m} \\
 d_2 &= 2 \text{ cm} &= 0,02 \text{ m} \\
 h &= 2 \text{ mm} &= 0,001 \text{ m} \\
 \varrho_{Hg} &= 13,534 \text{ g} \cdot \text{cm}^3 = 13\,534 \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \\
 \varrho_{Au} &= 19,29 \text{ g} \cdot \text{cm}^3 = 19\,290 \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \\
 \varrho_{Ag} &= 10,49 \text{ g} \cdot \text{cm}^3 = 10\,490 \text{ kg} \cdot \text{m}^3
 \end{aligned}$$

Také se budou hodit vzorečky:

$$\begin{aligned}
 F_g &= m \cdot g \\
 F_{vz} &= V \cdot \varrho \cdot g \\
 V &= \pi r^2 \cdot h \\
 m &= V \cdot \varrho
 \end{aligned}$$

Nejprve spočítáme sílu jakou bude působit menší mince Tu spočítáme jako $F_g - F_{vz}$:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \cdot d_1^2 \cdot h \\
 m_1 &= V \cdot \varrho_{Au} = \varrho_{Au} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot h \\
 F_g &= m_1 \cdot g = \varrho_{Au} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \\
 F_{vz} &= V \cdot \varrho \cdot g = \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot \varrho_{Hg} \cdot g \\
 F_1 &= F_g - F_{vz} = \varrho_{Au} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g - \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot \varrho_{Hg} \cdot g = \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot (\varrho_{Au} - \varrho_{Hg}) \\
 F_1 &= \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot (\varrho_{Au} - \varrho_{Hg})
 \end{aligned}$$

A jelikož na sobě mince plavou, tak víme, že: $F_2 - F_1 = 0$. To znamená, že F_2 Má opačný směr. Tudíž $F_g < F_{vz}$. A vyplývá tedy: $F_{vz} - F_g = F_1$.

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi \cdot d_2^2 \cdot h \\
 m_2 &= V \cdot ([n \cdot \varrho_{Au}] + [(1 - n) \cdot \varrho_{Ag}]) = \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot ([n \cdot \varrho_{Au}] + [(1 - n) \cdot \varrho_{Ag}]) \\
 F_g &= m_2 \cdot g = \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot ([n \cdot \varrho_{Au}] + [(1 - n) \cdot \varrho_{Ag}]) \cdot g \\
 F_{vz} &= V \cdot \varrho \cdot g = \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot \varrho_{Hg} \cdot g \\
 F_2 &= F_{vz} - F_g = \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot \varrho_{Hg} \cdot g - \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot ([n \cdot \varrho_{Au}] + [(1 - n) \cdot \varrho_{Ag}]) \cdot g = \\
 &= \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot g \cdot [\varrho_{Hg} - ([n \cdot \varrho_{Au}] + [(1 - n) \cdot \varrho_{Ag}])]
 \end{aligned}$$

A nyní máme rovnici $F_1 = F_2$:

$$\begin{aligned}
 \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot (\varrho_{Au} - \varrho_{Hg}) &= \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot g \cdot [\varrho_{Hg} - ([n \cdot \varrho_{Au}] + [(1 - n) \cdot \varrho_{Ag}])] \\
 d_2 &= 2d_1 \\
 (\varrho_{Au} - \varrho_{Hg}) &= 4 \cdot [\varrho_{Hg} - ([n \cdot \varrho_{Au}] + [(1 - n) \cdot \varrho_{Ag}])] \\
 \varrho_{Au} - \varrho_{Hg} &= 4\varrho_{Hg} - 4n \cdot \varrho_{Au} - 4 \cdot (1 - n) \cdot \varrho_{Ag} \\
 \varrho_{Au} - \varrho_{Hg} &= 4\varrho_{Hg} - 4n \cdot \varrho_{Au} - 4 \cdot \varrho_{Ag} - 4n\varrho_{Ag}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{Au} + 4\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg} &= -4n\rho_{Au} - 4n\rho_{Ag} \\
\rho_{Au} + 4\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg} &= -4n \cdot (\rho_{Au} - \rho_{Ag}) \\
\frac{\rho_{Au} - 5\rho_{Hg} + 4\rho_{Ag}}{\rho_{Au} - \rho_{Ag}} &= -4n \\
n &= -\frac{\rho_{Au} + 4\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg}}{4(\rho_{Au} - \rho_{Ag})} \\
n &= -\frac{19\,290 + 4 \cdot 10\,490 - 5 \cdot 13\,534}{4(19\,290 - 10\,490)} \approx 0,182
\end{aligned}$$

V minci je tedy 18,2% zlata.

Pokud dovolíme, aby byl podíl zlata v 1. minci k , pak bude platit:

$$\begin{aligned}
m_1 &= V \cdot ([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) = \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot ([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) \\
F_g &= m_1 \cdot g = \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot ([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) \\
F_1 &= F_g - F_{vz} = \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot ([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) - \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot \rho_{Hg} \cdot g = \\
&= \pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot ([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) - \rho_{Hg}
\end{aligned}$$

A opět k rovnici $F_1 = F_2$

$$\begin{aligned}
\pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot ([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) - \rho_{Hg} &= \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot g \cdot [\rho_{Hg} - ([n \cdot \rho_{Au}] + [(1-n) \cdot \rho_{Ag}])] \\
d_2 &= 2d_1 \\
([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) - \rho_{Hg} &= 4[\rho_{Hg} - ([n \cdot \rho_{Au}] + [(1-n) \cdot \rho_{Ag}])] \\
k\rho_{Au} + (1-k)\rho_{Ag} - \rho_{Hg} &= 4\rho_{Hg} - 4[n \cdot \rho_{Au}] - 4[(1-n) \cdot \rho_{Ag}] \\
k\rho_{Au} + \rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - \rho_{Hg} &= 4\rho_{Hg} - 4n\rho_{Au} - 4\rho_{Ag} - 4n\rho_{Ag} \\
k\rho_{Au} + 5\rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg} &= -4n\rho_{Au} - 4n\rho_{Ag} \\
k\rho_{Au} + 5\rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg} &= -4n(\rho_{Au} - \rho_{Ag}) \\
n &= -\frac{k\rho_{Au} + 5\rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg}}{4(\rho_{Au} - \rho_{Ag})}
\end{aligned}$$

A když nyní dosadíme $k = 1$, tak dostaneme: $n = -\frac{\rho_{Au} + 4\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg}}{4(\rho_{Au} - \rho_{Ag})}$. Což je stejná rovnice jako předtím.

Pokud bychom ještě chtěli říci, že 2. mince má b -krát větší objem vypadala by rovnice takto:

$$\begin{aligned}
\pi \cdot d_1^2 \cdot h \cdot g \cdot ([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) - \rho_{Hg} &= \pi \cdot d_2^2 \cdot h \cdot g \cdot [\rho_{Hg} - ([n \cdot \rho_{Au}] + [(1-n) \cdot \rho_{Ag}])] \\
V_2 &= b \cdot V_1 \\
([k\rho_{Au}] + [(1-k)\rho_{Ag}]) - \rho_{Hg} &= b[\rho_{Hg} - ([n \cdot \rho_{Au}] + [(1-n) \cdot \rho_{Ag}])] \\
k\rho_{Au} + (1-k)\rho_{Ag} - \rho_{Hg} &= b\rho_{Hg} - b[n \cdot \rho_{Au}] - b[(1-n) \cdot \rho_{Ag}] \\
k\rho_{Au} + \rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - \rho_{Hg} &= b\rho_{Hg} - bn\rho_{Au} - b\rho_{Ag} - bn\rho_{Ag} \\
k\rho_{Au} + (1+b)\rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - (1+b)\rho_{Hg} &= -bn\rho_{Au} - bn\rho_{Ag}
\end{aligned}$$

$$k\rho_{Au} + (1+b)\rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - (1+b)\rho_{Hg} = -4n(\rho_{Au} - \rho_{Ag})$$

$$n = -\frac{k\rho_{Au} + (1+b)\rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - (1+b)\rho_{Hg}}{b(\rho_{Au} - \rho_{Ag})}$$

A pokud nyní dosadíme $b = 4$ a $k = 1$, dostaneme: $n = -\frac{k\rho_{Au} + 4\rho_{Ag} - 5\rho_{Hg}}{4(\rho_{Au} - \rho_{Ag})}$, což je stejná rovnice jako na začátku. Výsledná rovnice tedy je:

$$n = -\frac{k\rho_{Au} + (1+b)\rho_{Ag} - k\rho_{Ag} - (1+b)\rho_{Hg}}{b(\rho_{Au} - \rho_{Ag})} \quad (50)$$

Kde k je poměr zlata ku stříbru v první minci a n je poměr zlata ku stříbru v druhé minci. b je podíl objemů druhé a první mince (kolikrát je 2. mince větší). ρ_{Au} hustota zlata, ρ_{Ag} hustota stříbra a ρ_{Hg} hustota rtuti.

13.3 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 3. úloha

Z rakety obíhající po kružnici ve výšce $h = 2\,000\text{ km}$ nad Zemí hodíme směrem k Zemi nebohý šroubovák rychlostí $v = 5\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vůči lodi. Za jak dlouho dopadne?

Předpokládejme, že původní trajektorie lodě byla kruhová. Pak druhý Keplerův zákon způsobí, že dráha šroubováku se změní na elipsu. Tudíž ze začátku bude šroubovák chvílemi dokonce i výše než na začátku. Šroubovák se bude k zemi přibližovat na 2 místech. Šroubovák bude pomalu klesat a to rychlostí $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. A bude klesat a klesat, dokud nezačne působit atmosféra, což se stane okolo výšky 100 km. Takže šroubovák musí klesnout o 1 900 km. Což odpovídá 380 h (necelých 16 dnů, reálně spíše 14, kvůli tření, co jsme dříve zanedbali).

Co se stane reálně můžeme otestovat ve hře Kerbal Space Program :-D

A tak jsem to otestoval, vytvořil jsem si kosmickou stanici a vynesl ji na dráhu, která se, co nejvíce podobala zadání, rozpojil jsem moduly (moje stanice měla celé 2!) a jeden jsem urychlil směrem k zemi. A pustil zrychlení času. Po 30 dnech se nic nestalo a nic nenaznačovalo tomu, že by se něco mělo změnit, dokonce hrozilo, že se moduly časem znovu srazí. A už vůbec ne, že by se mělo nějaké těleso přiblížit zemi. Obě trajektorie se protínaly v místě, kde jsem tělesu doval rychlost a na druhé straně Země.

Asi to bude nějak souviset s druhým Keplerovým zákonem.

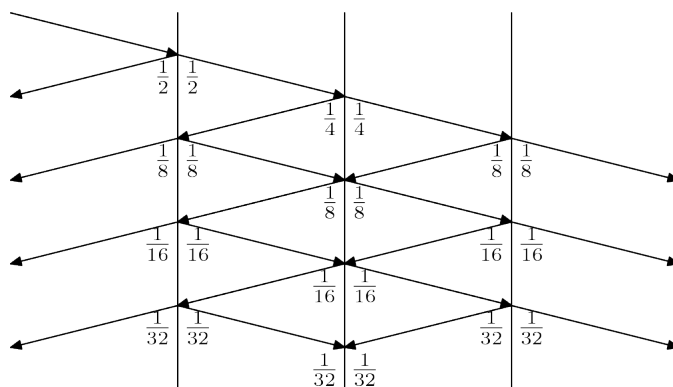
To co jsem psal na začátku je špatně kvůli tomu, že vektor rychlosti není permanentní, je to pouze impuls. Nakonec by šroubovák možná spadl za milióny let kvůli tření (jelikož i zde je stále atmosféra).

13.4 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 4. úloha

Máme optickou soustavu tvořenou třemi polopropustnými zrcadly v jedné ose za sebou. Každé zrcadlo by samo o sobě polovinu dopadajícího záření propustilo a polovinu odrazilo. Jaká část světla celkově projde naší optickou soustavou?

Bonus: Vyřešte úlohu pro n zrcadel.

Uděláme si náčrtek a abychom se v tom takto vyznali, představíme si, že na zrcadla svítíme trochu pod úhlem, tak aby nám paprsky neslivali do jednoho.



Obrázek 12: 3 zrcadla

Jak vidíme tak napravo budeme sčítat nekonečnou řadu:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{4}. \quad (51)$$

Rovněž si můžeme všimnout, že pokud se podíváme na situaci po prvních pár odrazech, tak prostřední zrcadlo v podstatě vypadá ze hry a paprsky se odrážejí pouze mezi krajními zrcadli s tím, že s každým odrazem ztrácí na každé straně $\frac{1}{4}$ všeho světla co zbylo, celkem tedy polovinu. Z toho vyplývá, že na každou stranu se přesně polovina zbylého světla. A vzhledem k tomu, že jsme (do té doby, než jsme schopni aplikovat tento postup ztratili $\frac{5}{8}$ nalevo a vyzářila se $\frac{1}{8}$ napravo a zbývají nám ještě $\frac{2}{8}$. Zjišťujeme, že $\frac{2}{8}$ se rozdělí na polovinu a k $\frac{1}{8}$ nám napravo přibude $\frac{1}{8}$ a máme $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Pro n zrcadel to je asi $\frac{1}{n+1}$.

13.5 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; 5. úloha

Mirkovi během zimních měsíců přišlo, že má doma na čtení příliš šero. Usmyslel si proto, že nechá do zdi pokoje vybourat otvor pro další okno. Nejdřív se ale vydal do sklárství koupit okenní tabulku. Moc se mu líbila jedna kruhová, ale ještě než ji koupil, potřeboval prozkoumat, jestli není sklo příliš křivé (vypuklé). Položil tabulku na dokonale rovnou skleněnou desku na pultě obchodu a pozoroval duhové kroužky, které vznikly kolem středu tabulky interferencí kolmo dopadajícího bílého světla na vzduchové mezeře mezi skly. Mirek náhodně vybral dva sousední červené kroužky ($\lambda \approx 700 \text{ nm}$) a pravítkem změřil jejich průměry $d_k = (10,5 \pm 0,5) \text{ mm}$ a $d_{k+1} = (13,0 \pm 0,5) \text{ mm}$. Na základě těchto údajů už dokázal určit poloměr křivosti kruhového skla. Určete ho i vy a zamyslete se nad tím, s jakou přesností byl stanoven.

Pozn: jediná úloha, co jsem ten rok neřešil.

13.6 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; P úloha

Představte si, že za vámi přijde inteligentní sedmileté dítě a zeptá se: „A co je to ta supravodivost?“ Co všechno byste ho museli naučit a co vše mu postupně vysvětlit, abyste mu tento jev teoreticky mohli objasnit bez užití „lží dětem“ (Význam pojmu „lež dětem“ můžete najít v knížce Věda na Zeměploše; zjednodušeně se jedná o vysvětlení, které není úplně pravdivé, ale má pomoci danou věc alespoň zhruba pochopit, klasicky třeba představa atomů jako malinkatých, pevných kuliček) na odborné úrovni? Řešení zkuste rozpracovat co nejvíce.

Bude záležet na tom jak moc chceme zacházet do detailů a jestli chceme jen vědět, co je supravodivost nebo i vědět k čemu je dobrá. Na začátek ale bude určitě potřeba elektřina, pak možná malá odbočka k nízkým teplotám a a pokud budeme chtít alespoň základy užití, tak se asi bez magnetické indukce neobejdeme.

Tak na začátek: Co je to elektřina. Ve stěnách máme dráty a těmi chodí elektrika a díky tomu můžeme do zásuvky strčit lampu a ona svítí. Ano? Tak těm drátům se odborně říká vodiče. (Ted' nevím jestli 7-leté děti znají elektrony). Těmi nám jde proud, a ten proud tvoří elektrony, elektrony jsou malé částice, tak malé, že je nikdo nevidí. A mají takovou speciální vlastnost, že jsou nabité, (ted' by se dalo o nic povídat dále, příklady, jako blesky atd. ale asi bych pokračoval a dyštak se k tomu vrátil později). Elektrony nám tedy proudí tím vodičkem a tomuto proudu se skutečně říká proud. Nemají to ale jednoduché, a protože když se něco pohybuje, vždy to jde jen s trochou námahy a to samé platí pro ně při pohybu ve vodiči a této vlastnosti se říká odpor. A pak je tu ještě 3. veličina které se říká napětí, která jakoby táhne (nebo tlačí) elektrony. Máme tedy 3 veličiny:

Proud: čím větší je proud tím více elektronů nám teče vodičem, čím menší je proud tím méně elektronů nám teče vodičem.

Odpor: čím větší je odpor tím méně elektronů nám teče vodičem, čím menší je odpor tím více elektronů nám teče vodičem.

Napětí: čím větší je napětí tím více elektronů nám teče vodičem, čím menší je napětí tím méně elektronů nám teče vodičem.

A poslední co potřebujeme vědět je, že když jakýkoliv elektron prochází vodičem, ta jelikož tam je ten odpor, tak se ten vodič s každým elektronem trochu zahřeje, ne moc, ale těch elektronů tam je hodně takže nakonec se ten vodič přeci jen trochu zahřát může. S tím se nám ještě pojí poslední zmíněná vlastnost a to, že když se vodič zahřeje tak se zvýší odpor, tudíž pak může proudit méně elektronů, ale to nechceme.

Dále je ještě potřeba říci si něco o nízkých teplotách. Nízké teploty nejsou takové, jako, když venku padá sníh a nám je zima, to jsou teploty výrazně menší. (Nevím, co všechno malé děti pochopí, jedna z věcí, co mě napadá je říci, že už i atomům je taková zima, že se ani nehýbají, ale nevím jak moc to splňuje zadání; ale asi nemá cenu zacházet hluboko do podrobností). Bavíme se o takových teplotách, když, kdyby někdo vešel do takové zimy, tak by tam během pár sekund umrzl.

Když ale dáme do takové zimy vodič a pustíme jím proud, tak vodič najednou nebude mít skoro žádný odpor a tudíž nám elektrony budou proudit takřka sami a nemusíme jim ani moc pomáhat. A další věc je, že díky malému odporu se nám vodič skoro ani nezahřívá.

Nakonec si ještě krátce můžeme povědět, kde toho můžeme využít (vzhledem k tomu, že to je sedmileté dítě, můžeme předpokládat, že už po druhé větě byla jeho pozornost někde jinde a do třetí věty nic, z toho, co jsem napsal nebylo posloucháno, ale už to dokončíme). Tak zaprvé, když potřebujeme, aby nám nějaký proud proudil bez ztrát (to by mělo být jasné). A dále pak u elektrických magnetů (to co je magnet snad ví), elektrický magnet funguje tak, že je to vlastně vodič namotaný na nějaký kov a když do vodiče pustíme proud, tak se to celé začne chovat jako magnet. Toho se hodně využívá v moderní vědě, jelikož díky tomu, že je vodič supravodivý, tak do něj můžeme pustit více proudu a on je pak výrazně silnější než kdyby supravodivý nebyl. Všechny nejsilnější magnety na světě jsou vyrobeny takto.

Nakonec bych se ho (pokud do té chvíle neuteklo), jestli tomu rozumí a pak bych se mu snažil vysvětlit, to co nepochytilo.

13.7 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; E úloha

Kupte si v lékárně šumivý celaskon nebo cokoliv, co se podává v tabletách určených k rozpuštění ve vodě. Změřte, jak dlouho trvá rozpuštění jedné tablety v závislosti na teplotě vody, do které ji hodíte. Diskutujte příčiny a vymyslete, proč je pozorovaná závislost taková.

Doba rozpuštění šumivé tablety GS extra C

V experimentu jsem měřil jak dlouho bude trvat rozpuštění tablety GS extra C.

Úkol: Budeme se experimentálně snažit vypátrat závislost délky rozpuštění tablety na teplotě vody.

Pomůcky: sklenice o objemu 300 ml, voda z kohoutku, rychlovarná konvice, led, stopky, teploměr a bratr (někdo pít musel).

Postup: Postup je jednoduchý: Připravíme vodu o požadované teplotě (průběžně měříme teplotu a promícháváme, dokud není teploty dosaženo, teploty dosahujeme pomocí horké vody z konvice nebo přidáváním ledu). Vhodíme tabletu a měříme čas dokud se tableta nerozpustí.

Snažil jsem se zajistit, aby při rozpouštění každé tablety byly podmínky pevně definované, tudíž jsem počkal až se teplota ustálila a sklenice prochladla nebo prohřála, dále jsem radši pokaždé sklenici důkladně opláchl.

Pak jsem se vrhl na samotné měření, měl jsem představu, že udělám pár měření nějak rovnoměrně a pak se budu zajímat o části, kde by se mohlo něco odehrávat. Naměřil jsem následující hodnoty:

i	$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{t}{\text{s}}$
1	16,0	64,0
2	85,0	35,0
3	41,5	38,5
4	36,5	42,0
5	22,0	54,0
6	4,0	140,0
7	18,5	60,0
8	27,0	49,0
9	11,5	73,0
10	7,5	90,0

Tabulka 14: naměřené hodnoty

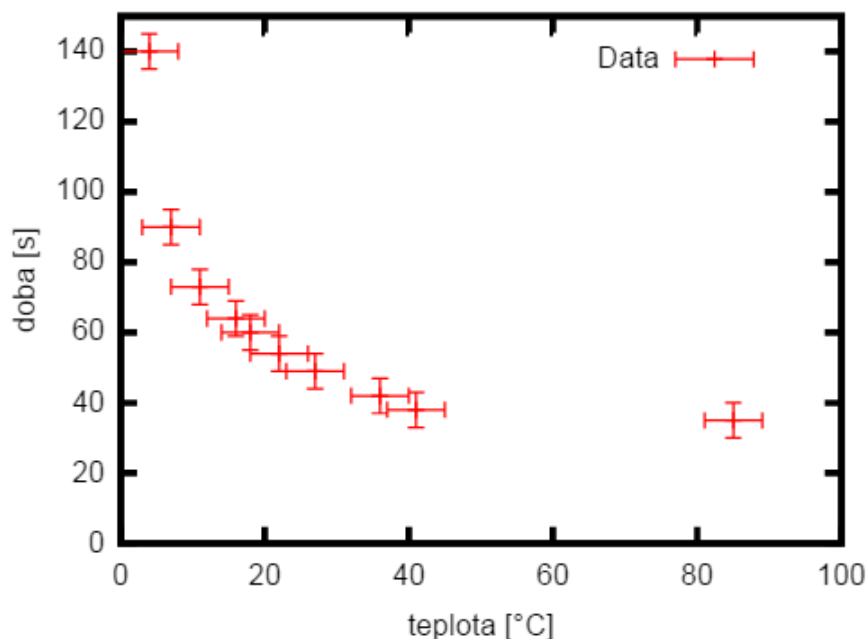
Nepřesnosti: Hlavní nepřesnost způsoboval teploměr, jeho přesnost odhaduji na 2°C . Dále také nemusela být konstantní teplota u pokusů s ledem. A to v průběhu experimentu, jelikož led se rozpouštěl spíše nepředvídatelně a teplota kolísala, tudíž, zde bych přidal k nepřesnosti 1°C . A také mohly být rozdílné teploty u dna a na hladině i přes mé míchání (nemohl jsem míchat v průběhu experimentu), opět bych přidal k nepřesnosti 1°C . Tudíž svoji nepřesnost teploty odhaduji na 4°C .

Dále se obtížně měřil čas a to z toho důvodu, že bylo těžké definovat, kdy tam tableta ještě je a kdy už není, závěrečné stádium tablety vypadalo tak, že se utvořilo něco jako oplatka a to se pak nějak náhodně rozpadlo. Někdy se tableta rozpadla rychleji někdy pomaleji. Také všechny tablety nejsou vyrobeny stejně. A nakonec nějakou chybu vytvářím já. Odhaduji celkovou nepřesnost měření času na 5 s.

Dále když jsem experiment připravoval, zajišťoval jsem rovnoměrnou teplotu ve sklenici tím, že jsem vodu míchal teploměrem. Potom, co jsem hodil tabletu do sklenice jsem už dále vodu míchat nemohl, kvůli proudům, které by mohli ovlivnit rozpad tablety. Dále také nemusela být teplota po dobu experimentu fixní, jelikož sklenice nebyla izolována.

Jelikož se jednalo o chemickou reakci, nabízí se nám, že mohlo jít o exotermní nebo endotermní reakci. To mohlo v místě kde se tableta nacházela rovněž měnit teplotu. Nakonec není k opomenutí ani to, že tableta měla vždy pokojovou teplotu.

Když si naneseme hodnoty do grafu dostaneme následující závislost:



Obrázek 13: Data&Graf

Z těchto dat například můžeme s jistotou říci, že se tableta nikdy nerozpustí za 30 s.

Rádi bychom však tyto body proložili nějakou křivkou, chtěl jsem je proložit exponenciálou, ale bohužel Gnuplotu vždy přeteče nějaká hodnota a nedaří se mi ho přesvědčit, aby mu tato hodnota nepřetékala.

Interpretace dat: Určitě dává smysl, že při vyšší teplotě se tableta rozpouští rychleji. Tableta se rozpouští tak, že do ní postupně narážejí atomy vody a postupně se z tablety uvolňují atomy. Jak vidíme, tak od 20°C už rychlost rozpouštění moc neroste (už se blíží k maximu), podle mě bude tato závislost souviset s rychlostí atomů a s energií, s jakou atomy vody do tablety narážejí (a s tím, že při vyšší teplotě je i více srážek). Tato rychlost se nebude zvyšovat lineárně, ale s druhou mocninou. Také bude mít svoji roli určitě stavba tablety a její tvar, s tím bude souviset, že tableta se nedokáže rozpustit dříve než za 30 s. Při teplotách blízkých se 0°C pak reakce takřka

přestane. Bohužel teď nemrzne a nejsem schopen připravit prostředí s teplotou pod bodem mrazu, ale teoreticky pokud bychom pak položili tabletu na kus ledu, Měli bychom se blížit stavu, kdy se nestane nic. A v papírově hrnci bychom se měli blížit k času 30 s.

Závěr: Takovouto závislost pozorujeme jelikož kinetická energie molekul vody (jako každé kapaliny) narůstá s druhou mocninou rychlosti. Tableta se nemůže však rozpustit dříve než za 30 s kvůli své vnitřní stavbě a tvaru. Přesnou rychlost reakce vyjadřuje rychlostní rovnice.

$$\frac{d[C]}{dt} = k(T)[A]^{n'}[B]^{m'} \quad (52)$$

[X] označuje koncentraci látky ([A], [B], [C]), a $k(T)$ rychlostní konstanta, která je závislá na ostatních faktorech, pro nás je důležité, že především na teplotě. Exponenty n' a m' jsou takzvané řády reakce, ty by se však v tomto případě měly schodovat (nejedná se o složitou reakci nýbrž o jednoduchou).

13.8 FYKOS XXIX. ročník; 2. série; S úloha

a. Které ze skupiny procesů (izobarický, izochorický, izotermický a adiabatický) mohou být vratné?

b. Vezměte vztah

$$T = \frac{pV}{nR},$$

kde $n = 1$ mol, $p = 100$ kPa a $V = 22$ l. O kolik se změní T , když p i V zvětšíme o 10%, 1% a 0,1%? Spočítejte to dvěma způsoby: přesně a pomocí vztahu

$$dT = T_p dp + T_V dV.$$

Jak se tyto výsledky liší?

c. d gymnastika:

Ukažte, že

$$d(Cf(x)) = Cdf(x),$$

kde C je konstanta.

Vypočítejte

$$d(x^2)d(x^3).$$

Ukažte, že

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$$

z definice, tedy

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}$$

Může se vám hodit:

$$(x+dx)(x-dx) = x^2 - (dx)^2 = x^2$$

Bonus: Platí

$$\sin d\vartheta = d\vartheta a \cos d\vartheta = 1.$$

Také máte součtový vzorec

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

dokažte

$$d(\sin \vartheta) = d\vartheta \cos \vartheta$$

Bonus: Podobně ukažte

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

s pomocí

$$\ln(1 + dx) = dx$$

d. Vysvětlete fyzikálně, proč je izobarická tepelná kapacita větší než izochorická.

a) Vratné mohou být: izotermický, izochorický, izobarický i adiabatický. Izochorický a izobarický, jelikož: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ A necháme jednu z veličin p_2 nebo V_2 konstantní, můžeme druhou libovolně upravovat a teplota se jí přizpůsobí, když pak půjdeme zpět, teplota se bude měnit stejně. A nebo naopak můžeme měnit teplotu. Příklad izotermického případu je jen v seriálu s rezervoárem, kdy teplo je konstantní a to, že je vratný je koneckonců dokázáno v seriálu. A nakonec adiabatický, zde si nejsem úplně jistý, ale pokud se vnější energie nemění, tak bychom měli schopni vrátit se do původního stavu a to i opačným postupem s opačnými následky.

b)

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$$n = 1 \text{ mol}$$

$$p = 100 \text{ kPa} = 100\,000 \text{ Pa}$$

$$V = 22 \text{ l} = 0,022 \text{ m}^3$$

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

p i V budeme zvětšovat o 10%, 1% a 0,1%.

Přesně nebo druhý způsob: $dT = T_p dp + T_v dV$ % Není mi úplně jasné, co má vyjadřovat ta čárka ve spodním indexu. Chápu to jako $dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV$.

Takže, pokud zvyšujeme o 10%, 1% a 0,1%, pak:

$$p = 100\,000 \text{ Pa}$$

$$V = 0,022 \text{ m}^3$$

$$p_1 = 110\,000 \text{ Pa}$$

$$V = 0,0242 \text{ m}^3$$

$$p_2 = 101\,000 \text{ Pa}$$

$$V = 0,02222 \text{ m}^3$$

$$p_3 = 100\,100 \text{ Pa}$$

$$V = 0,022022 \text{ m}^3$$

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{100\,000 \cdot 0,022}{1 \cdot 8,31} \approx 264,74 \text{ K}$$

$$T_1 = \frac{pV}{nR} = \frac{110\,000 \cdot 0,024}{1 \cdot 8,31} \approx 320,34 \text{ K}$$

$$T_2 = \frac{pV}{nR} = \frac{101\,000 \cdot 0,02222}{1 \cdot 8,31} \approx 270,06 \text{ K}$$

$$T_3 = \frac{pV}{nR} = \frac{100\,100 \cdot 0,022022}{1 \cdot 8,31} \approx 265,27 \text{ K}$$

$$\Delta T_1 = T_1 - T = 320,34 - 264,74 \approx 55,6 \text{ K}$$

$$\Delta T_2 = T_2 - T = 270,06 - 264,74 \approx 5,32 \text{ K}$$

$$\Delta T_3 = T_3 - T = 265,27 - 264,74 \approx 0,53 \text{ K}$$

$$dT = T_p dp + T_v dV$$

$$dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV$$

$$dT_1 = \frac{V}{nR} d_1 p + \frac{p}{nR} d_1 V \approx 120,3 \text{ K}$$

$$dT_2 = \frac{V}{nR} d_2 p + \frac{p}{nR} d_2 V \approx 12,0 \text{ K}$$

$$dT_3 = \frac{V}{nR} d_3 p + \frac{p}{nR} d_3 V \approx 1,2 \text{ K}$$

$$\Delta_{d\Delta} 1 =_{\Delta} T_1 - dT_1 \approx 64,7 \text{ K}$$

$$\Delta_{d\Delta} 2 =_{\Delta} T_2 - dT_2 \approx 6,7 \text{ K}$$

$$\Delta_{d\Delta} 3 =_{\Delta} T_3 - dT_3 \approx 0,7 \text{ K}$$

Čím menší změna je, tím menší je chyba.

c)

Jedná se o součin 2 funkcí takže:

$$d[Cf(x)] = dC \cdot fx + C \cdot d[f(x)] = 0 \cdot fx + C \cdot d[f(x)] = C \cdot d[f(x)]$$

$$d(x^2) = 2x$$

$$d(x^3) = 3x^2$$

$$d\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{df(x) \cdot f(y) - f(x) \cdot df(y)}{f(y)^2}$$

$$d\frac{1}{x} = \frac{d1 \cdot x - 1 \cdot dx}{x^2}$$

$$d\frac{1}{x} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot dx}{x^2} = -dx/x^2$$

$$(x + dx)(x - dx) = (x^2 - dx^2) = x^2$$

Člen dx^2 je vlastně 0^2 , tudíž ho můžeme vynechat.

14 FYKOS XXIX. ročník 3. série

14.1 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 1. úloha

V akváriu ve tvaru koule s poloměrem $r = 10$ cm plně naplněném vodou plavou v opačných směrech dvě stejné rybičky. Rybička má průřez $S = 5$ cm², Newtonův odporový koeficient $C = 0,2$ a plave rychlostí $v = 5$ km · h⁻¹ vůči vodě. Jak dlouho musí rybičky v akváriu plavat, aby ohřály vodu o 1 stupeň Celsia? Tepelné ztráty a biologické procesy v rybičkách zanedbejte.

Nejprve musíme spočítat odporovou sílu jakou působí prostředí na rybičku:

$$F_o = \frac{1}{2} C S \varrho v^2. \quad (53)$$

C je ze zadání $C = 0,2$. $S = 5 \text{ cm}^2 = 0,0005 \text{ m}^2$. ϱ je hustota tekutiny, v našem případě $\varrho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Rychlost rovněž známe, ta je rovna: $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odporovou sílu tedy můžeme spočítat jako:

$$F_o = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,0005 \cdot 1000 \cdot 5^2 = 1,25 \text{ N}. \quad (54)$$

A nyní musíme vypočítat potřebnou práci k ohřátí vody o 1°C , nejprve musíme spočítat objem akvária.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi 0,1^3 = \frac{4\pi}{3000} \text{ m}^3. \quad (55)$$

Ze zadání víme: $r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$. Z toho vidíme, že:

$$m = \varrho \cdot V = \frac{4\pi}{3000} \cdot 1000 = \frac{4\pi}{3} \text{ kg}. \quad (56)$$

Měrná tepelná kapacita vody je $4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Tudíž potřebná energie k ohřátí akvária (vody) o 1°C bude:

$$E = m \cdot c \cdot t = \frac{4\pi}{3} \cdot 4180 \cdot 1 = \frac{16720\pi}{3} \text{ J}. \quad (57)$$

Rybky tím, že plavou konají práci, jelikož působí silou opačnou vůči odporové na dráze, rychlosti $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$E = 2F \cdot s = 2F \cdot v \cdot t \quad (58)$$

$$t = \frac{E}{2Fv} = \frac{\frac{16720\pi}{3}}{2 \cdot 1,25 \cdot 5} = \frac{33440\pi}{70} = \frac{3344\pi}{7} \approx 1500 \text{ s}. \quad (59)$$

Bude tedy trvat přibližně 25 min, než se voda ohřeje o 1°C .

14.2 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 2. úloha

Náš nejmenovaný mladý alchymista, řekněme mu Jirka N., se naučil používat elektrolýzu a měřit elektrochemický ekvivalent látky. Dokonce se mu podařilo naměřit u jednoho vzorku hodnotu elektrochemického ekvivalentu relativně přesně, a to $A = (6,74 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1}$. Ale sám si neví rady, jak určit, o jakou látku se jedná. Poradte mu!

Nejprve použijeme druhý Faradayův zákon:

$$A = \frac{M}{F \cdot z} \quad (60)$$

kde A je elektrochemický ekvivalent, F je Faradayova konstanta
 $F = 9,6485 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$, z je počet elektronů, které jsou potřeba při
 vyloučení jedné molekuly a M molární hmotnost. A známe ze zadání, to je:
 $A = (6,74 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1}$. A neznáme z a M . z neznáme, ale víme,
 že to je celé číslo (elektrony nemůžeme dělit). Tudíž když si vyjádříme M :

$$M = A \cdot F \cdot z \quad (61)$$

Když nyní zkusíme počet elektronů roven 1:

$$M_1 = 6,74 \cdot 10^{-7} \cdot 9,6485 \cdot 10^4 \cdot 1 \approx 0,065 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} = 65 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_1 = (65,031 \pm 0,014) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_{\text{Zn}} = 65,39 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Pro 2 elektrony nám nevyjde žádný prvek.

A nakonec zkusíme počet elektronů roven 3:

$$M_3 = 6,74 \cdot 10^{-7} \cdot 9,6485 \cdot 10^4 \cdot 3 \approx 0,195 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} = 195 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_3 = (195,093 \pm 0,043) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_{\text{Pt}} = 195,08 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Pro 4 elektrony nám rovněž nevyjde žádný prvek.

Zinek se však vyskytuje ve sloučeninách jako Zn^{2+} . Navíc v tabulkách
 jsem se setkal pouze s hodnotou $A_{\text{Zn}} = 3,39 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1}$. Na anglické wi-
 kipedii jsem se dočetl, že „+1 is very rare“.

U platiny je prý údajně nejčastější 4+ a 2+, ale III ve výčtu oxidačních
 čísel je, takže si myslím, že platina je nejpravděpodobnější.

Narymu tedy bych tedy poradil, že má před sebou platinu.

14.3 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 3. úloha

Mějme nehmotnou pružinu o tuhosti k . Na jednom jejím konci je připevněno závaží o hmotnosti m , na jejím druhém konci je připevněno druhé závaží o hmotnosti M . Tuto sestavu položíme na vodorovnou desku tak, že závaží o hmotnosti M bude ležet na desce a závaží o hmotnosti m bude trčet na pružině přímo nad prvním závažím. Soustava je v rovnovážném stavu (tj. první závaží nekmitá) a délka pružiny v tomto stavu je l . Určete jak moc musíme pružinu stlačit, aby po jejím uvolnění závaží o hmotnosti M nadskočilo. Uvažujte pouze vertikální pohyb.

Nejprve si představíme, jak to celé bude probíhat: nejprve budeme mít 2 závaží na pružině, tak jak je popsáno v zadání, poté stlačíme horní závaží o Δl_1 oproti délce nezátížené pružiny, poté co ho pustíme, bude vymrštno horní závaží nahoru, pružina bude působit tak, že je bude odpuzovat od sebe a spodní závaží bude tlačit do podložky. Poté však pružina dosáhne délky l_n a už bude závaží přitahovat k sobě, největší silou bude pružina k sobě přitahovat závaží v momentě, kdy od sebe budou závaží nejdále v budě $l_n + \Delta l_2$ – v tomto místě bude muset být síla tak velká, že odlepí spodní závaží od podložky. Nesmíme však zapomínat, že závaží o hmotnosti m stále působí silou na pružinu.

Závaží hmotnosti M , působí na podložku silou $F_M = M \cdot g$. A závaží hmotnosti m $F_m = m \cdot g$. Dále po stlačení pružiny bude pružina klást odpor, který bude stejný jako síla kterou jsme ji stlačili, označme si ji jako F_1 . Poté se pružina vymrštní a nadzdvihávat závaží M silou F_2 . O této síle víme, že: $F_2 < F_1$ a $F_2 = F_M$ (– pokud počítáme hraniční hodnotu, aby se závaží M odlepilo, tak $F_2 > F_M$).

A nyní víme, že závaží m neustále stlačuje pružinu silou F_m , pokud se tedy bude pružina napínat, bude konat práci, jelikož bude tlačit silou opačnou po nějaké dráze, tuto dráhu si vyjádříme jako: $\Delta l_1 + \Delta l_2$.

Dále víme, že energii stlačené pružiny si vyjádříme jako $E_p = \frac{1}{2}kl^2$. Tuhost pružiny se počítá jako: $k = \frac{F}{\Delta l}$, z toho F jako $F = k\Delta l$. Víme, že F_2 je rovna F_M tedy:

$$M \cdot g = k\Delta l_2 \quad (62)$$

$$\frac{M \cdot g}{k} = \Delta l_2 \quad (63)$$

Z toho můžeme spočítat potenciální energii pružiny v horní poloze:

$$E_{p2} = \frac{1}{2}k\Delta l_2^2 \quad (64)$$

$$E_{p2} = \frac{1}{2}k \frac{M^2 \cdot g^2}{k^2} = \frac{M^2 \cdot g^2}{2k} \quad (65)$$

Nyní si značme ztrátu energii jako ΔE , bude pro ni platit: $\Delta E = E_{p1} - E_{p2}$ nebo $\Delta E = P = F_m \cdot s = mg(\Delta l_1 + \Delta l_2)$. Můžeme si tedy vyjádřit $E_{p1} = \Delta E + E_{p2}$.

$$E_{p1} = \Delta E + E_{p2} \quad (66)$$

$$\frac{1}{2}k_{\Delta}l_1^2 = mg(\Delta l_1 + \Delta l_2) + \frac{M^2 \cdot g^2}{2k} \quad (67)$$

$$\frac{1}{2}k_{\Delta}l_1^2 = mg(\Delta l_1 + \frac{M \cdot g}{k}) + \frac{M^2 \cdot g^2}{2k} \quad (68)$$

$$k_{\Delta}l_1^2 = 2mg\Delta l_1 + 2mg\frac{M \cdot g}{k} + \frac{M^2 \cdot g^2}{k} \quad (69)$$

$$k_{\Delta}l_1^2 - 2mg\Delta l_1 - \frac{2mgM \cdot g + M^2 \cdot g^2}{k} = 0 \quad (70)$$

$$k_{\Delta}l_1^2 - 2mgk_{\Delta}l_1 - g^2(2mM + M^2) = 0 \quad (71)$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (2mgk)^2 - 4 \cdot k^2 \cdot -g^2(2mM + M^2)$$

$$D = 4m^2g^2k^2 + 4k^2g^2(2mM + M^2)$$

$$D = 4g^2k^2 \cdot [m^2 + (2mM + M^2)]$$

$$D = 4g^2k^2 \cdot (m + M)^2$$

$$\Delta l_1 = \frac{2mgk \pm \sqrt{4g^2k^2 \cdot (m+M)^2}}{2k^2} = \frac{2mgk \pm 2gk(m+M)}{2k^2} = \frac{2gk \cdot (m \pm (m+M))}{2k^2} = \frac{g \cdot (m \pm (m+M))}{k}$$

Máme 2 kořeny: $\frac{g \cdot (m+(m+M))}{k}$ a $\frac{g \cdot (m-(m+M))}{k}$. Ty upravíme na: $\frac{g \cdot (2m+M)}{k}$ a $\frac{-M \cdot g}{k}$.

Jak si ale můžeme všimnout, tak: $\Delta l_2 = \frac{M \cdot g}{k}$ Tudíž v tomto případě jsme dostali onu druhou výchylku, která nás nezajímá, máme tedy jediný kořen:

$$\Delta l_1 = \frac{g \cdot (2m + M)}{k}. \quad (72)$$

To jsme tedy spočítali jak moc musí být pružina stlačena oproti nezatíženému stavu. Víme, že $k = \frac{F}{\Delta l}$. Tudíž:

$$F =_{\Delta} l \cdot k \quad (73)$$

$$F = \frac{g \cdot (2m + M)}{k} \cdot k \quad (74)$$

$$F = g \cdot (2m + M) \quad (75)$$

To je ale celková síla, my už máme pružinu zatíženou F_m .

$$F = g \cdot (2m + M) - g \cdot m \quad (76)$$

Musíme tedy působit následující silou, aby spodní závaží poskočilo::

$$F = g \cdot (m + M) \quad (77)$$

14.4 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 4. úloha

Po sebeprudším sešlápnutí brzdového pedálu nezačne auto brzdit okamžitě, ale brzdná síla po dobu t_r lineárně narůstá až na hodnotu F_m . Koeficient statického třetí mezi pneumatikou a vozovkou je f . Jakou maximální rychlostí se může tento automobil pohybovat, aby ani při nouzovém brzdění nedošlo ke smyku?

Jak je tedy uvedeno v zadání: brzdná síla lineárně narůstá po dobu t_r na hodnotu F_m , poté je konstantní (až do zastavení). Koeficient statického tření je f . Nejprve si musíme vyjádřit třecí sílu jakou můžeme ještě brzdit, než dojde ke smyku.

$$F_t = f \cdot F_n = f \cdot m \cdot g \quad (78)$$

Jak vidíme, tak třecí síla nezávisí na rychlosti (to se nám hodí). Pokud je $F_m \leq F_t$, tak ke smyku nedojde nikdy. V tomto případě můžeme jet tak rychle, jak chceme. Pokud ale $F_m > F_t$, tak ke smyku dojde v momentě, kdy je $F_m > F_t$.

Rychlost tedy může být maximálně taková, aby auto stihlo zastavit dříve než síla přesáhne kritickou hodnotu. Bude se nám hodit vztah:

$$F = m \cdot a \quad (79)$$

Z toho můžeme vyjádřit a jako: $a = \frac{F}{m}$. Jelikož F narůstá lineárně, tak můžeme napsat následující vztah: $\frac{t}{t_r} = \frac{F}{F_m}$. A nyní vyjádříme F jako: $\frac{t}{t_r} \cdot F_m$. Nyní tedy můžeme zapsat: $a = \frac{t}{t_r} \cdot F_m \cdot \frac{1}{m}$. To upravíme na: $a = \frac{F_m t}{m t_r}$. Změnu rychlosti spočítáme zintegrováním. Neště ale nesmíme zapomenout, že síla působí proti směru pohybu a aby nám nevyšla záporná rychlost, tak musíme ještě před F_m přidat $-$.

$$v = \int \frac{-F_m t}{m t_r} dt \quad (80)$$

$$v = -\frac{F_m}{m t_r} \int t dt \quad (81)$$

$$v = -\frac{F_m}{m t_r} \cdot \frac{t^2}{2} \quad (82)$$

$$v = -\frac{F_m t^2}{2 m t_r} + C \quad (83)$$

C musí být rovněž nějaká rychlost (kvůli jednotkám), označíme si jí tedy v_0 (je to počáteční rychlost):

$$v = -\frac{F_m t^2}{2 m t_r} + v_0 \quad (84)$$

Nyní dokážeme vyjádřit čas, konečná rychlost $v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$\frac{F_m t^2}{2 m t_r} = v_0 \quad (85)$$

$$t = \sqrt{\frac{v_0 2mt_r}{F_m}} \quad (86)$$

Nyní se vrátíme k $\frac{t}{t_r} = \frac{F}{F_m}$:

$$F = \frac{F_m}{t_r} t \quad (87)$$

Tato síla musí být rovna třecí síle tedy:

$$f \cdot m \cdot g = \frac{F_m}{t_r} t \quad (88)$$

Do této rovnice můžeme dosadit náš čas:

$$f \cdot m \cdot g = \frac{F_m}{t_r} \cdot \sqrt{\frac{v_0 2mt_r}{F_m}} \quad (89)$$

$$\frac{f \cdot m \cdot g \cdot t_r}{F_m} = \sqrt{\frac{v_0 2mt_r}{F_m}} \quad (90)$$

$$\frac{f^2 \cdot m^2 \cdot g^2 \cdot t_r^2}{F_m^2} = \frac{v_0 2mt_r}{F_m} \quad (91)$$

$$\frac{f^2 \cdot m \cdot g^2 \cdot t_r}{2F_m} = v_0 \quad (92)$$

Automobil tedy může jet maximální rychlostí:

$$v = \frac{f^2 \cdot g^2 \cdot m \cdot t_r}{2F_m} \quad (93)$$

14.5 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; 5. úloha

Na lavici se sklonem $\alpha = 5^\circ$ leží sešit formátu A4 o hmotnosti m , mezi lavicí a sešitem působí statická třecí síla s koeficientem $f_0 = 0.52$. Poté kdosi do lavice strčí a ta začne kmitat ve směru sklonu desky s frekvencí $\nu = 10$ Hz a amplitudou $A = 1$ mm.

a. Určete, jakou dodatečnou silou musíme na sešit tlačit (kolmo na lavici), aby se sešit nezačal pohybovat.

b. Určete, za jak dlouho sešit spadne z lavice, jestliže je na počátku jeho spodní hrana (ta kratší) na dolním okraji lavice. Dynamický koeficient tření je f , sešit považujte za tuhou desku.

Statickou třecí sílu spočítáme jako:

$$F_s = f \cdot F_n = f_0 \cdot m \cdot g \quad (94)$$

f je koeficient tření, m je hmotnost, g je tíhové zrychlení. V našem případě je však lavice nakloněná, tudíž síla v klidovém stavu bude:

$$F_s = f_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha. \quad (95)$$

Na chvíli opustíme tření. Dále musíme počítat s harmonickými kmity, aktuální výchylku spočítáme jako:

$$y = y_m \cdot \sin \omega t. \quad (96)$$

Zrychlení pak jako:

$$a = -y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t = -y \cdot \omega^2. \quad (97)$$

Jinak ω se počítá jako:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (98)$$

Dále také bude důležitý vztah:

$$F = m \cdot a \quad (99)$$

Jelikož pomocí něho můžeme můžeme spočítat aktuální sílu (v horizontálním směru) v závislosti na zrychlení, které známe. Nyní se nám budou dělit síly na horizontální a vertikální, toto naše síla se vždy sečte s gravitační silou. A tento součet se pak rozloží na směr kolmý na lavici s souběžný s lavicí. Ale aby se nám lépe počítalo, tak vektory nejprve rozdělíme na jejich složky a poté tyto složky sečteme.

$$F_{rovnobezna} = m \cdot g \cdot \sin \alpha + m \cdot a \cdot \cos \alpha \quad (100)$$

$$F_{kolma} = m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha \quad (101)$$

Poté pokud bude vektor souběžný s lavicí dostatečně velký, větší než $f \cdot m \cdot g$, tak se sešit utrhne, všimněme si, že zde není $\sin \omega$, jelikož nyní jsme už po rozkladu vektorů a už počítáme se silou souběžnou s podložkou.

A nyní umíme spočítat třecí sílu jako:

$$F_t = F_{kolma} \cdot f_0 \quad (102)$$

A k odtržení dojde pokud $F_{rovnobezna} > F_t$. Tedy:

$$F_{rovnobezna} > F_t \quad (103)$$

$$F_{rovnobezna} > F_{kolma} \cdot f_0 \quad (104)$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha + m \cdot a \cdot \cos \alpha > (m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha) \cdot f_0 \quad (105)$$

$$g \cdot \sin \alpha + a \cdot \cos \alpha > (g \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha) \cdot f_0 \quad (106)$$

$$g \cdot \sin \alpha - y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \alpha > (g \cdot \cos \alpha - y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha) \cdot f_0 \quad (107)$$

Pokud tedy chceme vědět jakou silou musíme působit na sešit, aby se nedal do pohybu, tak musíme zajistit, aby $F_{rovnobezna}$ nikdy nebyla větší než F_t . Tudíž zvětšíme F_{kolma} , k tomu ale musíme zvýšit maximální hodnotu F_t .

Tudíž musíme znát maximální hodnotu a . $a = -y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t$

Tudíž $a_{max} = -y_m \cdot \omega^2 \cdot 1 = -y_m \cdot \omega^2$.

Pokud si silou, kterou tlačíme označíme jako F_{my} , tak bude platit:

$$F_t + F_{my} \cdot f_0 = F_{rovnobezna}. \text{ Tedy: } F_{my} = \frac{F_{rovnobezna} - F_t}{f_0}$$

$$F_{rovnobezna} = m \cdot g \cdot \sin \alpha + m \cdot a \cdot \cos \alpha \quad (108)$$

$$F_t = (m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha) \cdot f_0 \quad (109)$$

$$F_{my} = \frac{(m \cdot g \cdot \sin \alpha + m \cdot a \cdot \cos \alpha) - ((m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha) \cdot f_0)}{f_0} \quad (110)$$

$$F_{my} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha + m \cdot a \cdot \cos \alpha}{f_0} - (m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha) \quad (111)$$

$$F_{my} = m \left(\frac{g \cdot \sin \alpha + a \cdot \cos \alpha}{f_0} - g \cdot \cos \alpha - a \cdot \sin \alpha \right) \quad (112)$$

$$F_{my} = m \left(\frac{g \cdot \sin \alpha + a \cdot \cos \alpha}{f_0} - g \cdot \cos \alpha - a \cdot \sin \alpha \right) \quad (113)$$

Musíme dopočítat maximální zrychlení, jelikož nejprve počítáme s kyvem dopředu a až pak dozadu, tak se bude maximální zrychlení rovnat:

$a_{max} = y_m \cdot \omega^2$. Číselně tedy:

$$F_{my} \approx -0,909m \quad (114)$$

Sešit se tedy udrží na lavici nezávisle na naší vynaložené síle.

Co se týče výpočtu toho, jak dlouho to bude trvat než sešit spadne, tak nejprve budeme muset dopočítat o kolik se sešit posune během jednoho kmitu, (poté už bude stačit spočítat kolik kmitů bude potřeba, aby se sešit posunul o polovinu své délky a aby spadl (toto je pouze přibližně, jelikož sešit spadne ve chvíli, kdy je těžiště mimo desku lavice, toto je tedy pouze zjednodušení, které si můžeme dovolit pouze jelikož rozměry sešitu jsou výrazně větší než amplituda (sešit se může i vracet, my takto počítáme pouze s účinným posuvem během 1 kmitu))).

Dále víme, že sešit se „utrhne“ od povrchu, když už tření nebude dostatečně velké a $F_{rovnobezna}$ bude moc velká. Poté musíme nějak popsat chování sešitu, jelikož sešit se chvíli bude nejprve pohybovat s lavicí, pak se utrhne ale bude furt mírně urychlován a poté, co zase bude opět tření dostatečně velké (POZOR, nepočítáme teď s f_0 , ale s f), tak se opět bude sešit pohybovat s lavicí). To samé se bude konat i při pohybu na druhou stranu. Problém je, že sešit bude jednu chvíli kvůli tření urychlován a poté bude zpomalován, dokud nebude tření dostatečně velké.

Rovnice by měly vypadat takto:

Utrhnutí:

$$m(g \cdot \sin \alpha + a \cdot \cos \alpha) > m(g \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha) \cdot f_0 \quad (115)$$

Přilnutí zpět:

$$m(g \cdot \sin \alpha + a \cdot \cos \alpha) < m(g \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha) \cdot f \quad (116)$$

Mezi tím bude působit síla:

$$F_{tah} = m(g \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha) \cdot f \quad (117)$$

Dále:

$$m = \frac{F}{a} \quad (118)$$

Nyní dosadíme za a jeho vzoreček:

$$a_{sesitu} = \frac{F_{tah}}{m} = (g \cdot \cos \alpha + [-y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t] \cdot \sin \alpha) \cdot f \quad (119)$$

A budeme integrovat podle t , abychom dostali v a poté opět ještě jednou, abychom dostali s

$$s_{sesitu} = \int \int (g \cdot \cos \alpha + [-y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t] \cdot \sin \alpha) \cdot f \, dt \, dt \quad (120)$$

$$s_{sesitu} = \int \int (g \cdot \cos \alpha - y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha) \cdot f \, dt \, dt \quad (121)$$

$$s_{sesitu} = \int \int g \cdot \cos \alpha \cdot f \, dt \, dt - \int \int y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha \cdot f \, dt \, dt \quad (122)$$

$$s_{sesitu} = 0 - \int \int y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha \cdot f \, dt \, dt \quad (123)$$

$$s_{sesitu} = 0 + \sin \alpha \cdot f \int \int -y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \, dt \, dt \quad (124)$$

$$s_{sesitu} = \sin \alpha \cdot f \cdot y_m \cdot \sin \omega t + C_1 x + C_2 \quad (125)$$

Sešit dráha sešitu mezi jednotlivými časy by se měla dát spočítat jako:

$$s_{sesitu} = y_m f \sin \alpha \sin \omega (t_2 - t_1) \quad (126)$$

Kde t_1 bude čas odtržení a t_2 bude čas přilnutí. Tyto časy by už měly jít dopočítat podle vzorců o stranu dříve. Toto sice není úplně kompletní řešení, ale asi by se už z toho výsledek dopočítat dal (pokud není chyba v integrálech (popravdě bych i odhadoval, že tam bude...)).

14.6 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; P úloha

Lukáš posiloval a povedlo se mu vyrobit černou díru o hmotnosti 1 kg. Protože nemá úplně v lásce kvantovou teorii pole na křivém pozadí, tak jeho díra nic nevyzařuje. Lukáš tuto díru upustí a ona začne kmitat uvnitř Země. Zkuste odhadnout, za jak dlouho se hmotnost díry zdvojnásobí. Je nebezpečné si doma pokoutně vyrábět černé díry?

Pokud tedy předkládáme, že černá díra nic nevyzařuje, tak tedy neztrácí na hmotnosti a pouze hmotnost získává. A to tak, že vše, co do ní spadne se stává její součástí. Nebo v našem případě spíše, vše na co díra spadne se stane její součástí. Nejprve musíme spočítat jak velká vlastně naše díra bude. K tomu potřebujeme spočítat Schwarzschildův poloměr:

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2}, \quad (127)$$

kde G je gravitační konstanta ($G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$), m je hmotnost objektu (černé díry), c je rychlost světla a r_s je poloměr černé díry.

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 1}{299\,792\,458^2} \approx 1,485 \cdot 10^{-27} \text{ m}. \quad (128)$$

Pro porovnání: velikost 1 atomu se pohybuje okolo 10^{-10} m . Což je podobný poměr jako když vedle sebe postavíme atom a Zemí³⁵. Černou díru tak můžeme považovat za hmotný bod. Nyní budeme řešit jak na sebe černá díra bude nabalovat hmotu.

Nejprve na sebe černá díra určitě nabalí to, do čeho narazí, toho ale vzhledem její velikosti toho bude málo. Musíme počítat i s tím, co přitáhne svoji gravitací.

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (129)$$

Nejčastější částice jsou elektrony, protony a neutrony, ostatní můžeme zanedbat. Klidové hmotnosti našich objektů jsou a další důležité údaje:

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_{\text{díry}} = 1 \text{ kg}$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

Pokud víme, že bude potřeba nějaká určitá síla k tomu, aby byla částice odtržena a zajímá nás vzdálenost, tak si upravíme vzoreček na: $r = \sqrt{k \frac{m_1 m_2}{F}}$.

A nyní budeme mít poměrně problém s počítáním, jelikož gravitační síla je

³⁵Podobný problém (s černou dírou hmotnosti mince a velikosti mince) se řeší i na kanálu *Kurzgesagt – In a Nutshell* ve videu - *Black Holes Explained – From Birth to Death* akorát, že tam počítají s Hawkingovým zářením, tudíž zde všechna shoda končí. Ale je zde vysvětleno mnoho věcí o černých dírách a tak to spíše bokem zmiňuji.

relativně výrazně slabší. Relativní velikost gravitační síly je 10^0 a elektromagnetické 10^{36} a také se nám do toho motají slabé (10^{25}) a silné (10^{38}) interakce.

Tady bych asi ukončil své výpočty, jelikož se už asi nedokáži udržet ve správných řádech a budu spíše popisovat, co bude mít jaké důsledky. (né, že bych to nezkoušel dále počítat, ale jen mi vycházela čísla, která se mi zdála zcela nereálná a jako píšu výše, už se asi nedokážu se svými odhady držet v řádech)

Pokud bude gravitační síla (černá díra nebude produkovat žádný náboj, jelikož nic jí neunikne a ani žádnou jinou sílu) bude dostatečně silná, aby nějak spolehlivě dokázala posbírat alespoň pár elektronů při průletu atomem, tak bude nabírat hmotnost poměrně rychle, pokud by byla schopná vysávat jádra, tak by to vůbec šlo rychle, pak už by stačilo spočítat kolika atomy asi tak musí prolétnout, kolika proletí během 1 m a poté by už výpočet netrval tak dlouho. Pokud ale nebude sbírat částice nějak často (alespoň 1 částici za pár atomů), tak bude celý proces bude o hodně delší.

Vše se ale bude odvíjet od toho, kolik toho stihne černá díra procestovat, aby toho spořádala co nejvíce. Pokud bude procházet prostředím bez ztrát rychlosti při srážkách, tak vždy proletí Zemí přes jádro na druhou stranu a poté opět do jádra, na povrch a tak dále. Černá díra bude na cestě k jádru zrychlovat a poté opět zpomalovat, její pohyb půjde popsat jako pohyb harmonického oscilátoru. Pokud jí srážky budou zpomalovat, tak se bude amplituda a délka jednoho kmitu zmenšovat a nakonec skončí ve středu Země.

Nakonec bychom ještě měli počítat s tím, že díra narůstá a s tím i především síla, kterou působí díra na okolí se razantně zvětšuje, což bude mít za následek zrychlení růstu (zde přijde určitě na řadu integrování).

14.7 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; E úloha

Změřte závislost hmotnosti hydrogelové kuličky na době ponoření do vody a na koncentraci soli rozpuštěné ve vodě.

Měření závislost hmotnosti hydrogelové kuličky na době ponoření do vody a na koncentraci soli rozpuštěné ve vodě

Pomůcky: 10 skleniček, voda, sůl, hydrogenové kuličky, váha, budík

Zadání je celkem prosté, nejprve hodíme nějaký počet kuliček do vody o nějaké koncentraci soli a poté budeme po nějakých časových intervalech měřit hmotnost kuliček. Nejprve jsem si připravil 10 nádob se stejným množstvím

$m_{vody} = 150 \text{ g}$ hmotnost 1 skleničky vody

$m_{1sul} = 4,5 \text{ g}$ 1 sůl je 1 čajová lžička soli

$c = \frac{n \cdot m_{1sul}}{m_{vody} + n \cdot m_{1sul}}$... c je hmotností koncentrace, n je počet lžiček soli

$m_{1kul} = 5 \text{ mg}$ hmotnost 1 kuličky

$m_{20kul} = 0,1 \text{ g}$ hmotnost 20 kuliček

vody a poté do nich nasypal různá množství soli (0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5). A dobře jsem tyto skleničky promíchal. Cílem bylo, aby mezi dvěma sousedními skleničkami byly vždy stejné (nebo pouze minimální). Koncentrace vydaly takto:

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
$n_{lžicek}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
c_m	0,0148	0,0291	0,0431	0,0566	0,0698	0,0826	0,0950	0,1071	0,1189	0,1304

Tabulka 15: koncentrace

Poté jsem si napočítal 200 hydrogenových kuliček a poté je zvážil, tak jsem zjistil kolik přibližně váží. Dále jsem si je rozdělil do skupinek po 20. A poté jsem je postupně během minimálního časového intervalu naházal do určených skleniček (to, že to nebylo najednou nevadí, jelikož celý proces

stejně trvá dlouho a navíc nám budou vznikat při každém vážení rovněž zpoždění, tudíž než vždy dojdeme od první skleničce k poslední, tak to vždy chvilku trvá, proto to můžeme zanedbat). Po naházení kuliček do vody jsem si nastali budík a šel řešit FYKOS. Po půl hodině jsem vždy provedl měření, roztok jsem zcedil a poté zvážil kuličky na váze. Poté jsem je opět vrátil do roztoku a po zvážení všech kuliček jsem opět nastavil budík na další měření. Dostal jsem se k následujícím hodnotám (pro 20 kuliček):

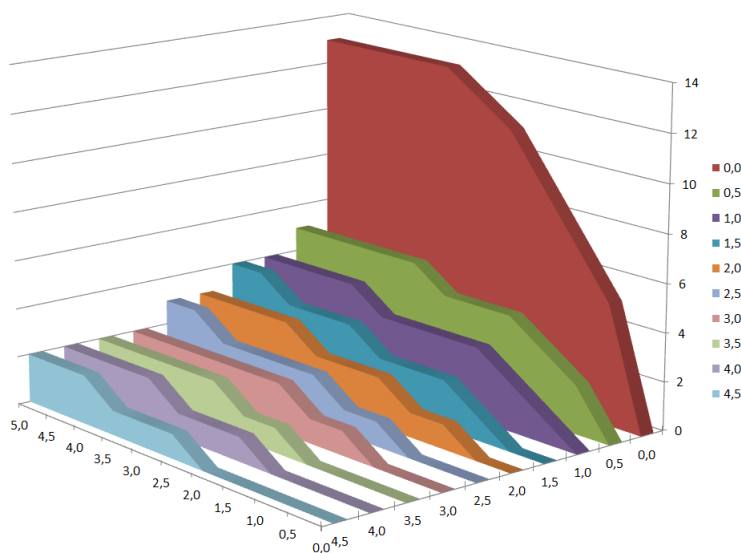
c	$\frac{m_1}{g}$	$\frac{m_2}{g}$	$\frac{m_3}{g}$	$\frac{m_4}{g}$	$\frac{m_5}{g}$	$\frac{m_6}{g}$	$\frac{m_7}{g}$	$\frac{m_8}{g}$	$\frac{m_9}{g}$	$\frac{m_{10}}{g}$
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0
1,0	7	3	2	1	1	0	0	0	0	0
1,5	9	4	3	2	1	1	1	0	0	0
2,0	11	4	3	2	2	1	1	1	1	0
2,5	12	4	3	2	2	2	2	1	1	1
3,0	13	5	3	3	2	2	2	2	1	1
3,5	13	5	4	3	3	2	2	2	2	1
4,0	13	5	4	3	3	2	2	2	2	2
4,5	13	5	4	4	3	3	2	2	2	2
5,0	13	5	4	4	3	3	2	2	2	2

Tabulka 16: hodnoty m

3D graf m (pro 20 kuliček):

Označíme si osu, na kterou vynášíme množství soli jako x (ta co je na obrázku od středu doprava (jednotky jsou lžičky soli)) a časovou osu jako y (od středu doleva). Upozorním ještě, že osa x je vlastně obrácena a to z toho důvodu, že jinak by nebyly ostatní průběhy tak dobře vidět. Jinak tento graf není vhodný, jelikož by zde měly být správně vyneseny pouze hodnoty, jelikož neznáme funkce mezi body, ale kdybych vynesl pouze hodnoty, tak by se v grafu pak nedalo tak dobře vyznat a proto jsem zvolil tento typ grafu, i když je špatný.

Je zajímavé, že když se podíváme na graf, tak zde vlastně vidíme 2 závislosti. Když se podíváme na koncové hodnoty v čase 5 h, tak zde vidíme něco, co by se dalo popsat jako exponenciála, s tím, že čím více soli, tím méně vody koule nabraly. Pokud se podíváme na časový průběh vzorku s čistou vodou, tak vidíme, že koule narůstaly ze začátku velmi rychle, ale pak



se růst zpomalil až zastavil, podobně můžeme popsat i ostatní vzorky.

Důležité je zde zmínit, že to co celou dobu řešíme je vyrovnávání osmotického tlaku. Kuličky fungují tak, že pomocí nějakých minerálů které obsahují, nasávají vodu. Pokud roztok obsahuje sůl, tak zákonitě mohou dosáhnout nižší maximální hmotnosti. Pak také určitě bude platit, že rychlost narůstání bude větší, když rozdíl osmotických tlaků prostředí bude vyšší, tudíž z toho vyplývá, že rychlost narůstání by nejprve měla být vyšší a poté by měla klesat. Jak vidíme, tak oba tyto parametry naše data velmi dobře splňují.

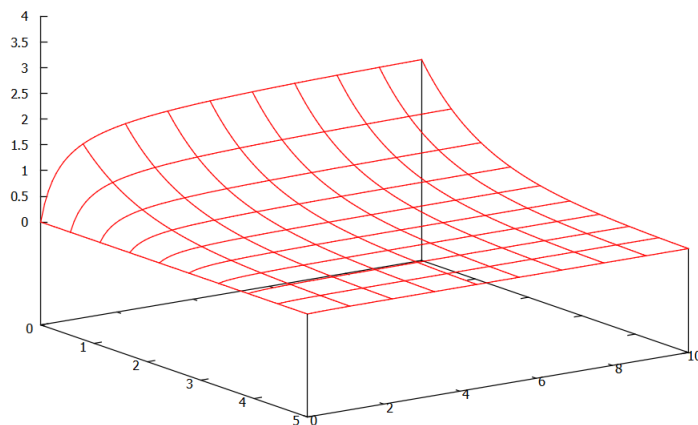
Pokud budeme uvažovat jaké funkce by to mohli být, tak co se týče závislosti hmotnosti na koncentraci soli, tak se nám nabízí exponenciála, určitě mají naše hledané funkce to, že ze začátku prudce klesají, ale nikdy nedosáhnou 0, stejně jako naše funkce nemůže být nikdy 0 (kulička nezaknize). Co se týče druhé funkce, tak tam už si vůbec nejsem jistý, napadá mě pouze, že v nějakém vysokém čase se bude hmotnost blížit nějaké hodnotě (limitně) a tudíž budeme pátrat po nějaké funkci, která se přibližuje stále blíže a blíže nějaké ose, napadá mě tedy hyperbola (nějak posunutá...).

Výslednou hodnotu ale budeme moci spočítat jako součin těchto dvou funkcí + základní hmotnost kuliček, pod kterou už z nich nejde vysát žádná

voda. Jelikož součin těchto dvou funkcí nám bude popisovat kolik vody nabraly a konstanta bude popisovat hmotnost minerálů v kuličce, co způsobují osmotický tlak (tato hmotnost bude fixní).

Abych tedy shrnul výsledky: tak víme, že kuličky postupem času narůstají čím dál pomaleji, s přidáním soli rapidně ztrácí na maximálním objemu, ale nemůžou zmizet kvůli tomu, že z nich můžeme vysát pouze všechnu vodu, ale ne minerály.

Nakonec ještě přikládám graf, kde jsem se pokusil vymodelovat 3D graf, jehož tvar by byl podobný datům, což se alespoň z vizuální stránky celkem podařilo, tudíž jsme přišli s něčím, co dokáže poměrně dobře pospat naše data:



Obrázek 14: osa od středu nalevo je x (0:5), osa od středu napravo je y (0:10)

Poznámka Hydrogel vám má přijít společně se zadáním série. Pokud jste v tomto ročníku ještě žádnou úlohu neřešili, ale chcete hydrogel také dostat, ozvěte se nám.

14.8 FYKOS XXIX. ročník; 3. série; S úloha

Všechny stavy ideálního plynu umíme nakreslit jako digramy: pV diagram, pT diagram a tak dále. Na svislou osu se vynáší první veličina, na vodorovnou osu se vynáší druhá veličina. Každý bod tedy určuje dva parametry. Načrtněte do pV diagramu 4 děje s ideálním plynem, které znáte. Udělejte to stejné pro Tp diagram. Jak by vypadal UT diagram? Vysvětlete, jak se nevhodnost těchto dvou proměnných jeví na tomto obrázku.

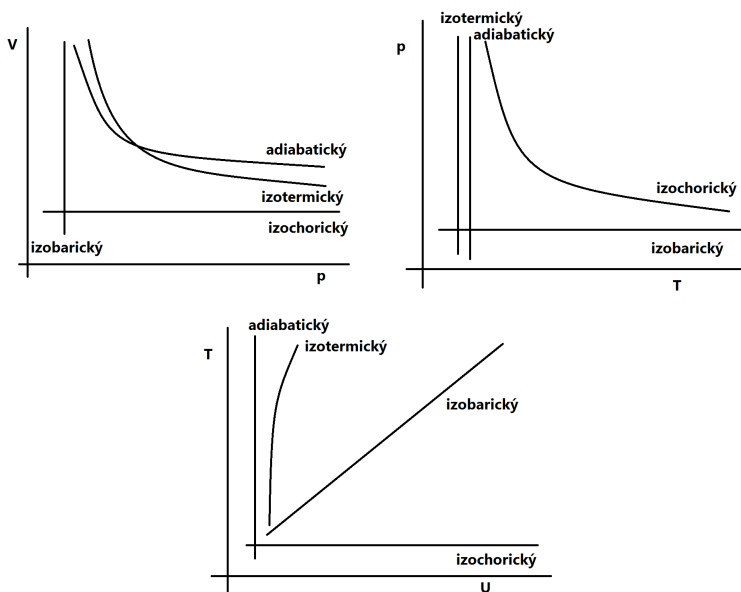
Jaké jednotky má entropie? Jaké jiné veličiny s těmito jednotkami znáte?

V seriálu jsme rozebrali případ nárůstu entropie, když plyn přijímal teplo. Proveďte podobnou úvahu pro plyn odevzdávající teplo.

Víte, že při adiabatickém ději se entropie nemění. Proto entropie jako funkce objemu a tlaku $S(p, V)$ může obsahovat jen takovou kombinaci objemu a tlaku, která se také při adiabatickém procesu nemění. Jaký je to výraz? Nakreslete na pV diagram (svislá osa je p , vodorovná V) křivky, na kterých je entropie konstantní. Souhlasí výsledek této úvahy se vzorcem, který jsme pro entropii odvodili?

Vyjádřete entropii ideálního plynu jako funkci $S(p, V)$, $S(T, V)$ a $S(U, V)$.

a) Nejprve si nakreslíme pV , Tp a UT diagramy:



Jako první můžeme hned vyřadit Tp diagram, jelikož zde jsou adiabata a izoterma rovnoběžné. Dále u pV diagramu nám vadí izochora, jelikož adiabata je definována jako: pV^κ a κ je větší než 1. A jelikož na Vp diagramu se počítá práce jako plocha pod grafem, což by zde nešlo. U UT bychom rovněž nemohli počítat práci jako plochu pod grafem.

b) Vzoreček pro entropii je: $dS = \frac{\delta Q}{T}$. $[S] = \frac{J}{K} = J \cdot K^{-1}$. Stejně jednotky má i tepelná kapacita. (Boltzmannova konstanta je $1,38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$).

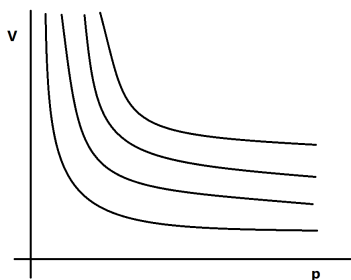
c) Použijme stejný příklad s rezervoárem, rezervoár je teplejší: $\delta Q > 0$, tedy $T_{rez} < T_{plyn}$.

$$dS_{celk} = dS_{plynu} + dS_{rez} = -\frac{\delta Q}{T_{plyn}} + \frac{\delta Q}{T_{rez}} = (-T_{rez} + T_{plyn}) \frac{\delta Q}{T_{plyn} T_{rez}} \quad (130)$$

$$T_{plyn} - T_{rez} > 0; \frac{\delta Q}{T_{plyn} T_{rez}} < 0$$

$$dS_{celk} = (-T_{rez} + T_{plyn}) \frac{\delta Q}{T_{plyn} T_{rez}} < 0. \quad (131)$$

d) Pokud se budeme pohybovat po těchto křivkách, tak entropie bude konstantní:



Řekl bych, že výsledek této úvahy se vzorcem souhlasí, jelikož funkce $\ln x$ by měla být zformována do nějakého takového tvaru.

e) $S(T, V)$ je odvozeno už v seriálu jako:

$$S = \frac{s}{2}nR \ln T + nR \ln V + S_0 \quad (132)$$

$S(U, V)$ odvodíme podobně, máme opět rovnici:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV \quad (133)$$

A opět pomocí stavové rovnice si vyjádříme T a p :

$$dS = \frac{s}{2}nR \frac{dU}{U} + nR \frac{dV}{V} \quad (134)$$

Opět použijeme $d \ln x = \frac{dx}{x}$

$$dS = d\left(\frac{s}{2}nR \ln U + nR \ln V\right) \quad (135)$$

$$d\left(S - \frac{s}{2}nR \ln U - nR \ln V\right) = 0 \quad (136)$$

Při kvaziostatickém procesu se veličina nemění.

Musíme obdobně přidat konstantu stejně jako v seriálu:

$$S = \frac{s}{2}nR \ln U + nR \ln V + S_0 \quad (137)$$

Vraťme se však ještě k rovnici ze seriálu:

$$dS = \frac{s}{2}nR\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \quad (138)$$

T si vyjádříme ze stavové rovnice a odsadíme:

$$dS = \frac{s}{2}nR\frac{\frac{dpV}{\frac{pV}{nR}}}{\frac{pV}{nR}} + nR\frac{dV}{V} \quad (139)$$

$$dS = \frac{s}{2}nR\frac{dp}{p} + nR\frac{dV}{V} \quad (140)$$

Nyní už provedeme pouze stejné úpravy a skončíme na:

$$S = \frac{s}{2}nR \ln p + nR \ln V + S_0 \quad (141)$$

15 FYKOS XXIX. ročník 4. série

15.1 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 1. úloha

Mějme kofolu s energetickou hodnotou $Q_k = 1360 \text{ kJ/kg}$ a teplotou $t_k = 24^\circ \text{C}$ a kofolu bez cukru s energetickou hodnotou $Q_{\text{bez}} = 14,4 \text{ kJ/kg}$ a teplotou $t_{\text{bez}} = 4^\circ \text{C}$. Pokud předpokládáme, že v jiných vlastnostech se kofoly od vody neliší, při jaké teplotě můžeme pít směs těchto kapalin tak, aby byla celková získaná energie nulová?

Víme, že:

$$\begin{aligned} Q_k &= 1360 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; t_k = 24^\circ\text{C}, \\ Q_{bez} &= 14,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; t_{bez} = 4^\circ\text{C} \\ c &= 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}; t_2 = 38^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Nyní musíme spočítat kolik energie získáme z 1 litru Kofoly. Ohřátím Kofoly ztratíme:

$$E_z = \Delta t \cdot c \cdot m.$$

Tudíž pro 1. a 2. Kofulu to bude:

$$\begin{aligned} E_{z_k} &= (t_2 - t_k) \cdot c \cdot m_k \\ E_{z_{bez}} &= (t_2 - t_{bez}) \cdot c \cdot m_{bez}. \end{aligned}$$

Celkovou přijatou energii spočítáme jako:

$$E_p = E - E_z = Q \cdot m - \Delta t \cdot c \cdot m = m(Q - \Delta t \cdot c).$$

Aby byl náš příjem nulový, tak součet energií musí být 0, vyjádříme si jednu z hmotností na základě druhé:

$$\begin{aligned} E_{p_k} + E_{p_{bez}} &= 0 \\ m_k(Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c) &= -m_{bez}(Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c) \\ m_k &= -m_{bez} \frac{Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c} \end{aligned}$$

V případě směšování našich směsí bude platit: $t_1 = \frac{m_k t_k + m_{bez} t_{bez}}{m_k + m_{bez}}$

$$t_1 = \frac{-m_{bez} \frac{Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c} t_k + m_{bez} t_{bez}}{-m_{bez} \frac{Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c} + m_{bez}} \quad (142)$$

$$t_1 = \frac{t_{bez} - \frac{Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c} t_k}{1 - \frac{Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c}} \quad (143)$$

$$t_1 = \frac{\frac{(Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c) t_{bez}}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c} - \frac{(Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c) t_k}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c}}{\frac{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c - Q_{bez} + [t_2 - t_{bez}] \cdot c}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c}} \quad (144)$$

$$t_1 = \frac{(Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c) t_{bez} - (Q_{bez} - [t_2 - t_{bez}] \cdot c) t_k}{Q_k - [t_2 - t_k] \cdot c - Q_{bez} + [t_2 - t_{bez}] \cdot c} \approx 5,8^\circ\text{C} \quad (145)$$

Mohli bychom ještě provést nějaké úpravy ve jmenovateli, ale takto se to lépe počítá pokud máme kalkulačku s pamětí.

15.2 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 2. úloha

Jak daleko musí být člověk od BTS, aby působení jejího vysílání na mozek bylo srovnatelné s vysíláním mobilu přímo u hlavy? Předpokládejte, že BTS vysílá rovnoměrně do poloprostoru a má vysílací výkon 400 W. Vysílací výkon mobilu je 1 W.

Základní vztah, z kterého budeme vycházet je, že:

$$L_1 = L_2. \quad (146)$$

L spočítáme jako: $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$:

$$10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{I_2}{I_0}, \quad (147)$$

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{I_2}{I_0}, \quad (148)$$

$$I_1 = I_2. \quad (149)$$

– tedy intenzity se budou rovnat. Pro intenzitu latí vztah: $I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$. Pro polokouli to však je: $I = \frac{P}{2\pi r^2}$. Označme si výkon BTS jako P_1 a výkon mobilu jako P_2 . Pak víme, že:

$$I_1 = \frac{P_1}{2\pi r_1^2}, \quad (150)$$

A o I_2 víme:

$$I_2 = \frac{P_2}{2\pi r_2^2}. \quad (151)$$

Nyní víme, že tyto 2 výrazy se musí rovnat:

$$I_1 = I_2, \quad (152)$$

$$\frac{P_1}{2\pi r_1^2} = \frac{P_2}{2\pi r_2^2}, \quad (153)$$

Nás zajímá r_1 (vzdálenost od BTS)

$$r_1 = \sqrt{\frac{r_2^2 P_1}{P_2}} = \sqrt{\frac{r_2^2 400}{1}} = 20r_2. \quad (154)$$

To vyšlo, pokud mobil vysílal též do poloprostoru, pro prostor by $I_2 = \frac{P_2}{4\pi r_2^2}$:

$$r_1 = \sqrt{\frac{2r_2^2 P_1}{P_2}} = \sqrt{\frac{2r_2^2 400}{1}} = 20\sqrt{2}r_2. \quad (155)$$

Otázka je kolik bude r_2 vzhledem k tomu, že telefonujeme s mobilem u hlavy, tak na vzdálenější části mozku bude působení výrazně menší než na nejbližší (odhaduji tedy r_2 na 5 mm až 10 cm). Dopočítat výsledek už je pak triviální.

15.3 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 3. úloha

Máme roli toaletního papíru o poloměru $R = 8$ cm s dutou částí o poloměru $r = 2$ cm. Každá vrstva namotaného papíru má tloušťku $d = 200$ μm a vrstvy na sebe dokonale přiléhají. O kolik útržků více v takovéto roli máme, pokud má jeden útržek délku $l_1 = 9$ cm, než když má jeden útržek délku $l_2 = 13$ cm? Jako součást řešení vyžadujeme odhad chyby použité aproximace.

Bonus: Vypočtěte přesnou délku spirály, kterou papír vytváří.

Pokud máme nějakou vrstvu o poloměru r_1 , tak délka toaletního papíru v této vrstvě bude $2\pi r_1$.

Množství vrstev spočítáme jako $n = \frac{R-r}{d}$. Tedy tloušťka vrstvy papíru dělená tloušťkou 1 vrstvy.

Tloušťku 1. vrstvy spočítáme jako $2\pi r$. A následující jako: $2\pi(r+d)$ a další jako: $2\pi(r+2d)$. Délka každé další vrstvy tedy bude $2\pi d$. Pro x -tou vrstvu to tedy bude $2\pi x d$.

Zde se nám bude hodit vzoreček na součet řady čísel: $k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Tudíž pro náš to bude: $2\pi \frac{(x+1)x}{2}d = \pi x(x+1)d$, pro n -tou vrstvu to bude: $\pi(n+1)nd$.

K tomu musíme ještě $(n+1)$ -krát přičíst $2\pi r$. (jelikož $\pi n(n+1)d$ je pouze součet délek, o které jsou další dílky delší než ten první).

Celkový součet délek bude: $l = (n+1)2\pi r + \pi(n+1)nd$.

$$\begin{aligned} &\text{My ještě víme, že } n = \frac{R-r}{d}: \\ l &= \left(\frac{R-r}{d} + 1\right)2\pi r + \pi\left(\frac{R-r}{d} + 1\right)nd \\ l &= \pi\left(\frac{R-r}{d} + 1\right) \cdot \left(2r + \frac{R-r}{d}d\right) \\ l &= \pi\left(\frac{R-r}{d} + 1\right) \cdot (2r + (R-r)) \\ l &= \pi\left(\frac{R-r}{d} + 1\right) \cdot (R+r) \\ l &= \pi(301) \cdot (100) = 30\,100\pi \\ l &\approx 94\,562\text{ mm} = 94,562\text{ m} \end{aligned}$$

Počet 9 cm útržku bude $\frac{l_1}{l_2} = \frac{13}{9} \approx 1,44$ krát větší než 13 cm útržků. V tomto případě to bude $\left(\lceil \frac{94,6}{0,13} \rceil - \lceil \frac{94,6}{0,09} \rceil\right) = 324$.

Přesnou délku spočítáme přes vzoreček na výpočet délky Archimédovy spirály. Nejprve musíme znát její rovnici:

$$r = a + b\theta \tag{156}$$

$$a = r; b = d; \theta = 2\pi \frac{R-r}{d}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (157)$$

$$a = 0,02; b = 0,0002; \theta = 2\pi \frac{0,06}{0,0002} = 600\pi$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{0,06}{600\pi} = \frac{1}{10\,000\pi}$$

A s <http://www.wolframalpha.com/>:

$$L = \int_0^{600\pi} \sqrt{\left(0,02 + \frac{1}{10\,000\pi}\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{10\,000\pi}\right)^2} d\theta \approx 94,25 \text{ m} \quad (158)$$

Jak vidíme tak chyba je nevýrazná (0,3%). Tudíž chyba aproximace je poměrně malá.

15.4 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 4. úloha

Kolik nejméně se musí spojit stejně velkých mýdlových bublinek o poloměru r , aby vytvořily jednu, která má poloměr alespoň $3r$? Uvažujte, že vzduch v bublinách má stále stejnou teplotu.

Bubliny jsou tvořeny ideálním plynem, pro který platí: $pV = NkT$.
 p je tlak, V objem, N počet částic, k je Boltzmannova konstanta a T teplota v K.

Teplota a Boltzmannova konstanta jsou konstanty.

Tudíž: $\frac{pV}{N} = c$,

$$\frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{p_2 V_2}{N_2} \quad (159)$$

Dále potřebujeme vzoreček na výpočet kapilárního tlaku, ten je pro kapku $p_k = \frac{2\sigma}{R}$, pro naši bublinu to však je $p_k = \frac{4\sigma}{R}$. (R je poloměr bubliny (v našem případě se shoduje s r))

Jako další věc si vyjádříme 2. objem jako následek 1:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{6}\pi(3r)^3}{\frac{4}{6}\pi(r)^3} = 27$$

Tedy: $V_2 = 27V_1$.

Stejně si i můžeme vyjádřit poměr mezi tlaky: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{4\sigma}{\frac{3}{2}R}}{\frac{4\sigma}{R}} = \frac{1}{3}$.

Tudíž: $p_2 = \frac{1}{3}p_1$.

Nyní se můžeme vrátit k rovnici $\frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{p_2 V_2}{N_2}$:

$$\frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{p_2 V_2}{N_2}, \quad (160)$$

$$\frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{\frac{1}{3}p_1 27V_1}{N_2}, \quad (161)$$

$$N_2 = 9N_1. \quad (162)$$

Jelikož počet částic bude $9\times$ vyšší, tak z toho vyplývá, že spojit se musí právě 9 bublin.

15.5 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; 5. úloha

Na vodorovné ploše jsou rovnoběžně položeny dva stejné kvádry o hmotnosti m a délce l . Vzdálenost bližších stěn těchto kvádrů je $2x_0$. Mezi kvádry začneme lít vodu objemovým tokem Q . Na krajích těchto kvádrů jsou mantinely zabírající odtékání vody z prostoru mezi kvádry. Statický koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je f_0 a dynamický f . Tření mezi kvádry a mantinely neuvažujte. Jaká je podmínka na f_0 , aby se kvádry vůbec nerozpohybovaly? V případě, kdy je f_0 dostatečně malé, vypočítejte závislost zrychlení kvádrů na jejich poloze a vzdálenost, ve které kvádry zastaví.

Veškerý pohyb vody považujte za dostatečně pomalý, takže v ní nevznikají žádné vlny ani víry, nezahřívá se třením, ani sama nemá žádnou kinetickou energii. Protože je tedy i Q malé, můžete uvažovat, že přilévání další vody po rozpohybování kvádrů nemá na jejich pohyb vliv.

Bonus: Najděte podmínku pro překlopení kvádrů.

Jelikož mají oba kvádry stejné vlastnosti, tak můžeme všimnout, že zde můžeme vést osu souměrnosti a celou situaci si rozdělit na 2 identické, nyní tedy budeme mít prostor o polovičních rozměrech, tedy x_0 namísto $2x_0$. Druhý rozměr zůstává stejný. A máme zde jako „kanál,“ kterým se bude pohybovat kvádr společně s vodou.

Všimněme si také, že šířka kvádry (d) nám pouze ovlivňuje čas, za jaký se prostor naplní na kritické množství. Pokud by byl přítok vody přímo úměrný na šířce kvádry, tak nám ona šířka z výpočtu úplně vypadává.

Dále také stojí za to zmínit, že délku kvádry budeme potřebovat až v bonusu. Jelikož na délce kvádry žádná z veličin záviset nebude (až překlopení v bonusu).

Je jasné, že k posunu kvádry dojde v momentě, kdy se bude síla z boku (pokud se díváme na řez) kvádry rovnat třetí síle. Třetí můžeme snadno spočítat jako: $F = m \cdot g \cdot f_0$. Tlakovou sílu počítáme jako $F = S \rho g h$, jelikož se jedná o stěnu, tak plochu S si vyjádříme jako: $S = d \cdot h$ (d je šířka kvádry). Hloubku pak budeme počítat jako průměrnou, jelikož síla s hloubkou lineárně narůstá. Tudíž podmínka pro posunutí kvádry je:

$$(dh) \rho g \frac{h}{2} = m g f_0 \quad (163)$$

$$d \frac{\rho g h^2}{2} = m g f_0 \quad (164)$$

$$d \frac{\rho h^2}{2} = m f_0 \quad (165)$$

Dále víme, že objemový průtok je $\frac{Q}{2}$ (celkový je Q) a plocha dna je $S_d = d \cdot x_0$. V čase t zde bude objem vody $V = \frac{Q}{2} \cdot t$. Výšku tedy spočítáme jako: $h = \frac{V}{S_d} = \frac{Q t}{2 d x_0}$. Nejprve si vyjádříme podmínku pro f_0 :

$$d \frac{\rho \left(\frac{Q t}{2 d x_0} \right)^2}{2} = m f_0 \quad (166)$$

$$\frac{\rho d \frac{Q^2 t^2}{4 d^2 x_0^2}}{2 m} = f_0 \quad (167)$$

$$f_0 = \frac{\rho Q^2 t^2}{8mdx_0^2} \quad (168)$$

Aby nedošlo k posunu, tak f_0 musí být větší nebo rovna, tudíž:

$$f_0 \geq \frac{\rho Q^2 t^2}{8mdx_0^2}. \quad (169)$$

Pokud f_0 nebude dostatečně velké, tak dojde k rozpohybování kvádru. Opět bude platit rovnost sil, ale tentokrát budeme počítat s dynamickým koeficientem tření f . A budeme muset spočítat, jaká bude výška hladiny vody, kdy se kvádr zastaví. Z toho půjde vyjádřit vzdálenost, kdy kvádr zastaví.

Pro výšku hladiny bude platit:

$$h_2 = \frac{V}{S_{d_2}} = \frac{Qt}{2dx_1}, \quad (170)$$

kde x_1 je vzdálenost, kde kvádr zastaví (posune se o $x_1 - x_0$).

Opět bude platit obdobný vztah:

$$d \frac{\rho h_2^2}{2} = mf \quad (171)$$

Poté klasicky dosadíme a vyjádříme x_1 :

$$d \frac{\rho \left(\frac{Qt}{2dx_1} \right)^2}{2} = mf \quad (172)$$

$$d \frac{\rho \left(\frac{Qt}{2dx_1} \right)^2}{2} = mf \quad (173)$$

$$d \frac{\rho \frac{Q^2 t^2}{4d^2 x_1^2}}{2} = mf \quad (174)$$

$$\frac{\rho Q^2 t^2}{8dx_1^2} = mf \quad (175)$$

$$Q^2 t^2 \frac{\rho}{8dmf} = x_1^2 \quad (176)$$

$$x_1 = Qt \sqrt{\frac{\rho}{8dmf}} \quad (177)$$

Pro zrychlení bychom potřebovali vyjádřit si síly působící na kvádr, opět by šlo o sílu, jenž působí voda na kvádr a třecí síla. Pomocí těchto vztahů lze vyjádřit sílu a ze síly zrychlení vztahem $a = \frac{F}{m}$, m známe a F v libovolném okamžiku též umíme spočítat.

$$F = F - F_t$$

x je vzdálenost od středu, posunutí je $(x - x_0)$

$$F = (dh) \rho g \frac{h}{2} = \frac{d\rho g h^2}{2} = \frac{d\rho g \left(\frac{Q_t}{2dx}\right)^2}{2}$$

A nebo pokud je už nyní objem konstantní (stále bereme $V/2$, jelikož celkový je V a my počítáme s polovinou) tak:

$$F = \frac{d\rho g \left(\frac{V}{2dx}\right)^2}{2} = \frac{d\rho g \frac{V^2}{4d^2x^2}}{2} = \frac{d\rho g V^2}{8d^2x^2} = \frac{\rho g V^2}{8dx^2}$$

$$F_t = mgf$$

$$F = \frac{\rho g V^2}{8dx^2} - mgf$$

$$F = g \left(\frac{\rho V^2}{8dx^2} - mf \right)$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{g \left(\frac{\rho V^2}{8dx^2} - mf \right)}{m} = g \left(\frac{\rho V^2}{8dx^2 m} - f \right)$$

A z této rovnice už pak můžeme spočítat zrychlení v libovolném bodě.

15.6 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; P úloha

Jak vysoká věž by se dala postavit z hliníkových plechovek od dietního nápoje kolového typu?

Na začátek si stanovme pár předpokladů: Zaprvé, plechovky budou vyrobeny nějak kvalitně, všechny stejné, všechny boční stěny budou stejně tlusté...

Pokud budeme stavět věž, tak si to představuji, tak, že budeme skládat plechovky ne tvaru blížícímu se válci na sebe (pouze na sebe – ve stylu rakety Saturn 5 ne R-7). Plechovky na sebe pomalu pokládáme, neházíme. Žádné vnější vlivy věž neovlivňují. Plechovka se začne deformovat až ve chvíli, pokud je $F > F_{max}$. A to tak, že se propadne do sebe a následuje pád věže. Uvažujme, že plechovky jsou prázdné a tlak v nich je atmosferický, snížení tlaku by vydrž snížilo, zvýšení by do určitého tlaku zvýšilo.

Pokud budou tyto podmínky splněny, tak bude platit, že nejvyšší tlak bude vždy na plechovku u podložky, na všechny další bude logicky menší a nezapomínejme, že všechny plechovky jsou stejné. Tudíž klíčová pro nás bude spodní plechovka. Jelikož pro všechny plechovky bude nějaký mezní tlak, při které se začnou deformovat, stejný.

Tudíž pokud řekneme, že plechovka má hmotnost m , tak věž se zhroutí, pokud $nmg \leq F_{max}$. Kde n je počet plechovek. Tato rovnice výše je vlastně podmínka pro to, aby věž ještě nespadla, není zde rovnost z toho důvodu, že zde musíme vždy přidat celou plechovku.

Tudíž nám stačí spočítat/změřit při jaké síle se zdeformuje spodní plechovka a množství ostatních plechovek a jejich výšku dokážeme dopočítat jako:

$$h = v \left(\left\lceil \frac{F_{max}}{mg} \right\rceil + 1 \right) \quad (178)$$

Kde h je výška celé věže, v je výška 1 plechovky, F_{max} je maximální síla při které ještě nenastává deformace, m je hmotnost jedné plechovky a g tíhové zrychlení. $+1$ zde je jelikož počítáme i se spodní plechovkou (s váhou 1. plechovky nepočítáme, jelikož ta musí unést sama sebe už na začátku, tudíž nám z výpočtu síly vypadá a tudíž ji zde musíme znova přičíst). $\lceil a \rceil$ jsou znaky pro zaokrouhlování dolů.

A nyní si ještě můžeme zkusit odhadnout kolik by tato věž mohla mít ve skutečnosti. Podle internetových zdrojů se pohybuje hmotnost plechovky

od 13,6 g do 17 g. Budeme počítat 15 g. Sílu, kdy dochází k deformaci jsem našel jako 890 N³⁶. Výšku plechovky jsem našel jako přibližně 12,25 cm. To by nám pro samotný výpočet mělo stačit.

$$h = v \left(\left\lceil \frac{F_{max}}{mg} \right\rceil + 1 \right) = 0,1225 \left(\left\lceil \frac{890}{0,015 \cdot 9,81} \right\rceil + 1 \right) = 0,1225(6\,048+1) \approx 741 \text{ m} \quad (179)$$

Což vidíme, že není zrovna málo. Pro zajímavost pro plnou plechovku o hmotnost 370 g, a maximální pevnosti 6 405 N by to bylo

$$h = v \left(\left\lceil \frac{F_{max}}{mg} \right\rceil + 1 \right) = 0,1225 \left(\left\lceil \frac{6\,405}{0,37 \cdot 9,81} \right\rceil + 1 \right) = 0,1225(1\,764+1) \approx 216 \text{ m}. \quad (180)$$

Což není rozhodně málo ani v jednom případě. Ve skutečnosti by však byla výška výrazně nižší, jelikož fouká vítr, působí vnější vlivy, plechovky jsou vratké atd. Jejich mez pevnosti je však tak velká, že bych z nich měly jít stavět stovky metrů vysoké věže a pokud bychom požili nějakou vhodnější konstrukci (třeba pyramidu se základnou 20×20 m), tak bychom mohli za dobrých povětrnostních podmínek postavit opravdu nemalou věž (pyramidu, věž, cokoliv... možná až stovky metrů (návrh na experimentálku na soustředku :D)).

³⁶<https://youtu.be/b0YJgr9u0HQ> – je zde prováděn test plné a prázdné plechovky hodnota 890 N je uvedena v popisku videa (Pro plnou plechovku je zde ještě hodnota 6 405 N).

15.7 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; E úloha

Změřte mez pevnosti v tahu kancelářského papíru. Ideálně použijte co nejméně potištěnou část brožurky ve které vám přišlo zadání (pro tisk je využíván papír $80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$).

Měření pevnosti kancelářského papíru v tahu

Teorie

Budeme měřit pevnost v tahu, tak že budeme dávat na proužek papíru závaží a z hmotnosti spočítáme působící sílu a poté pevnost v tahu.

Nejprve si vezmeme proužek papíru o dané šířce 1 cm, důležité je nejtenčí místo, jelikož zde je celkově papír nejslabší (pokud nepůsobí žádné vnější vlivy) a tudíž zde povolí nejdříve, proto je důležité, aby byly všechny použité proužky stejně široké.

Poté zavěsíme 1 proužek papíru na něco co, ho udrží tak aby směřoval kolmo k zemi a poté ho připravíme k tomu, aby na něj šla zavěsit závaží (Vše provádíme pomocí svorek, ne vrtáním děr nebo narušováním papíru). Papír by měl být ve všech místech stejně napnutý a hlavně nijak neporušený.

Premýšlel jsem o tom, že bych dal širší proužky nebo více proužků, ale po pár testech jsem přišel na to, že bych to technicky nezvládl, jelikož vždy se papírek začne trkat na straně (ať to zavěsím sebelíp, furt to nedokážu udělat dostatečně přesně), tudíž pokud by byla tloušťka papíru 2 cm, tak by možná nemusel mít dvojnásobnou výdrž (teoreticky samozřejmě má, ale prakticky ne), a u 2 papírů je ten problém, jak jsem měl svorku přidělanou k papíru, tak během zavěšování závaží docházelo k náklonu, takže při 2 papírech by nastalo to, že by to celé defakto viselo pouze na 1 papíru. A poté jsem měl také gramovou váhu do 5 kg a po přesáhnutí této hmotnosti bych měl už jen kilogramovou váhu, tudíž přesnost mého měření hmotností by pak poměrně výrazně klesla. A vzhledem k výsledkům (ke kterým se dostaneme později) si myslím, že jsem vybral ideální kombinaci mezi jednotlivými parametry.

Dále je zde také ten problém, že my nemůžeme přesně změřit, kdy se přesně papír utrhl, můžeme pouze změřit hodnotu předtím a potom, to ale není vůbec lehké, jelikož papír se trhá vždy jinak a když je špatně zavěšen, tak pevnost klidně může klesnout až $2\times$ (a to mluvíme o špatném zavěšení, kdy jsem to nepoznal, dokud se to neutrhlo výrazně dříve, jinak se mi to do té chvíle zdálo v pořádku a ani jsem to ještě nevážil).

Přesněji ještě uvedeno: naší metodou (že přidáváme závaží a z hmotnosti

počítáme sílu a z té počítáme tlak), nemůžeme dostat tak přesné výsledky, kdybychom měli nějaký elektronický přístroj, který by nám měřil nějaký vývoj tahu, tak bychom se mohli dostat k hodnotě přesnější (výsledkem by byla maximální síla), také pokud bychom měli nějaké lepší vybavení (typu laserová měřidla atd.), tak bychom mohli i přesněji upevnit papírky a přesněji na ně působit (pokud bychom měli nějaké úplně super vybavení jako nějakou 4K kameru, tak bychom možná mohli i nějak měřit postupnou deformaci papíru při trhání, to už je ale další problém).

Pomůcky

tužka, papír, pravítko, proužky papíru, přibližně 15 cm dlouhé a přesně 1 cm široké proužky papíru, gramové váhy, šupléra (posuvné měřidlo), svorky, závaží, vodováhy, kus dřeva

Postup

Nejprve určitě musíme znát tloušťku papíru pro pozdější účely, změřil jeho tloušťku³⁷ pro 15 listů jako $(1,55 \pm 0,01)$ mm. Pro jeden list (103 ± 1) μm .

Poté jsem si připravil dostatek papírů. Posléze jsem si upevnil kus dřeva ke stolu (aby papírek visel, abych mohl zavěšovat závaží aniž by se dotýkala země). Poté jsem k němu připevnil papírek tak, aby úhel mezi ním a dřevěným kusem dřeva byl 90° . Poté jsem připevnil takový malý svěrák, co jsem měl na spodní konec papírku, na něj jsem pak mohl s pomocí dránu krásně dávat závaží. Poté jsem už přidával závaží na papír (přichycoval jsem je ke svěráku) a měřil jsem, kdy papír povolí, postup času jsem zjistil, že když budu sundávat a opět dávat závaží na papír (a měřit je mezitím), tak se papír postupem času unaví a praskne dříve (podobný efekt, jako když letadla létají po několik let, tak se jejich trup namáhá, a po čase by měla být odepsána). Tak jsem pak spíše přešel na to, že jsem měl několik různých závaží (klíče (takové ty s dírou na obou koncích), ty se dobře vėsily) a nejprve jsem zkoušel dát lehčí a když se to neutrhlo, tak jsem ho vyměnil za těžší tak dále, dokud se to neutrhlo, poté jsem změřil hodnotu, při které se to utrhlo, občas se stávalo, že závaží pár sekund drželo a až pak došlo k přetržení. To znamenalo, že jsem byl opravdu blízko k hraniční hodnotě (řekněme, že odchylka

³⁷digitální šuplérrou s vysokou přesností

nebyla větší než 5%).

Měření

Pojďme se podívat na podívat na naměřené hodnoty. Nejsou zde některé naměřené hodnoty, jelikož byly od pohledu špatné, jelikož byly třeba 2× menší a bylo očividné, že papírek byl špatně upevněn.

i	$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{\Delta m}{\text{g}}$
1	2802	152
2	2733	84
3	2891	242
4	2577	-73
5	2418	-231
6	2676	27
7	2846	197
8	2486	-163
9	2470	-180
10	2595	-55
Σ	26492	1402
ϕ	2649	140

$m_{kriticka} = (2\,649 \pm 140) \text{ g}$ (hmotnost papírku jako takového můžeme klidně zanedbat)

$$F_{kriticka} = (25\,987 \pm 1374) \text{ mN}$$

$$\eta = \frac{\Delta F}{F} = \frac{1373}{25\,987} = 0,0528$$

Mezní pružnost počítáme $\frac{F}{S}$

Plochu spočítáme jako délku proužku vynásobenou tloušťkou:

$$S = 0,01 \cdot 0,000\,103 = 0,000\,001\,03 \text{ m}^2$$

$$P = \frac{F}{S} = \frac{25,987}{0,000\,001\,03} \approx 25,2 \text{ MPa}$$

Celkovou chybu spočítáme jako součet všech chyb.

$$\text{Chyba tloušťky papíru: } \eta_{\text{papir}} \frac{1}{103} \approx 0,0097$$

$$\eta = 0,0528 + 0,0097 = 0,0625$$

Dále ještě musím započítat všechny chyby mnou vytvořené a to, že vlastně měříme hodnoty, které jsou vlastně o trochu větší než výsledek, proto bych stanovil celkovou chybu na 0,2 (20%). A $P = (25, 2 \pm 5, 1)$ MPa. Započítávám zde i ostatní chyby jako nepřesnost váhy, ta však byla 1 g, tudíž byla oproti ostatním zanedbatelná. Nepřesnost měření tloušťky papíru též byla oproti mým chybám rovněž zanedbatelná (zahrnul jsem jí v oněch 20%).

Závěr

Naše měření bylo v celku nepřesné, jelikož zde bylo mnoho chyb a neměl jsem vybavení na to, abych mohl měřit skutečnou hodnotu, tudíž jsem musel měřit hodnotu vyšší, proto bych řekl, že skutečná hodnota bude pravděpodobně menší, než ona středová, myslím si ale, že by se měla nacházet v intervalu. Jinak o chybách jsem již hovořil, jako hlavní nepřesnost bych označil to, že papír nesměřoval kolmo dolů (odchylka byla třeba $0,5^\circ$), ale přesněji to už nešlo. Také nevím jestli jsem stlačením papíru při přichycování neměnil jeho vlastnosti tak, že byl náchylnější na poškození, ale vždy se trhal spíše uprostřed, tudíž si myslím, že to asi až zas takový vliv nemělo.

Také mě napadá otázka jestli není rozdíl v maximální síle, kterou unese papír po dobu pár sekund a po dobu několika minut, ale pro to jsem neměl dostatečné pomůcky abych to mohl nějak změřit.

15.8 FYKOS XXIX. ročník; 4. série; S úloha

a. Z nerovnosti

$$\Delta S_{tot} \geq 0$$

ze seriálu vyjádřete W a odvoďte tak nerovnost pro práci

$$W \leq Q \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right).$$

b. Vypočítejte účinnost Carnotova cyklu bez použití entropie.

Pomůcka: Napište si 4 rovnice spojující 4 vrcholy Carnotova cyklu

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa$$

$$p_3 V_3 = p_4 V_4$$

$$p_4 V_4^\kappa = p_1 V_1^\kappa$$

a vynásobte je všechny čtyři spolu. Po úpravě dostanete

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Následně stačí použít vzorec na práci při izotermickém procesu: když přechází proces z objemu V_A do V_B , práce vykonaná na plyn je

$$nRT \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right).$$

Ted' už si stačí jen uvědomit, že práce při izotermickém ději je rovná teplu (se správným znaménkem) a vypočítat získanou práci (vzpomeňte si, že adiabatické procesy nepřispívají) a odebrané teplo. Na řešení stačí doplnit detaily tohoto postupu.

c. Minule jste pracovali s pV a Tp diagramem. Udělejte stejné cvičení s TS diagramem, tedy nakreslete tam izotermický, izobarický, izochorický a

adiabatický proces. Nakreslite do diagramu také cestu plynu v Carnotově cyklu a označte správně směr a vrcholy, aby souhlasily s obrázkem v seriálu.

d. V seriálu jsme sa zmínili, že někdy je třeba dávat pozor na přijaté a odebrané teplo. Někdy se totiž to, jestli teplo přijímáme nebo odevzdáváme, mění v průběhu procesu. Jeden z příkladů je proces

$$p = p_0 e^{\frac{V}{V_0}},$$

kde p_0 a V_0 jsou konstanty. Určete, pro jaké hodnoty V (při rozpínání) proudí teplo do plynu a kdy z plynu.

a)

$$\Delta S_{tot} \geq 0 \quad (181)$$

$$\Delta S_{tot} = \frac{-Q}{T_H} + \frac{Q - W}{T_C} \quad (182)$$

$$\Delta S_{tot} T_C = \frac{-QT_C}{T_H} + Q - W \quad (183)$$

$$W = \frac{-QT_C}{T_H} + Q - \Delta S_{tot} T_C \quad (184)$$

$$W = \frac{-QT_C + T_H(Q - \Delta S_{tot} T_C)}{T_H} \quad (185)$$

$$W = \frac{-QT_C + QT_H - \Delta S_{tot} T_C T_H}{T_H} \quad (186)$$

$$W = \frac{-QT_C + QT_H}{T_H} - \frac{\Delta S_{tot} T_C T_H}{T_H} \quad (187)$$

$$W = Q \left(\frac{T_H - T_C}{T_H} \right) - \frac{\Delta S_{tot} T_C T_H}{T_H} \quad (188)$$

$$W = Q \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right) - \Delta S_{tot} T_C \quad (189)$$

$$\Delta S_{tot} \geq 0 \quad (190)$$

$$T_C \geq 0 \quad (191)$$

$$W \leq Q \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right) \quad (192)$$

b)

$$p_1 V_1 = p_2 V_2; p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa; p_3 V_3 = p_4 V_4; p_4 V_4^\kappa = p_1 V_1^\kappa$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2}$$

$$p_3 = \frac{p_4 V_4}{V_3}$$

$$p_1 = \frac{p_4 V_4^\kappa}{V_1^\kappa}$$

$$\frac{p_1 V_1}{V_2} V_2^\kappa = \frac{p_4 V_4}{V_3} V_3^\kappa; \quad \frac{\frac{p_4 V_4^\kappa}{V_1^\kappa} V_1}{V_2} V_2^\kappa = \frac{p_4 V_4}{V_3} V_3^\kappa$$

$$\frac{p_4 V_4^\kappa}{V_1^\kappa} V_1 V_2^\kappa = \frac{p_4 V_4 V_3^\kappa V_2}{V_3}; \quad \frac{V_4^\kappa}{V_1^\kappa} V_1 V_2^\kappa = \frac{V_4 V_3^\kappa V_2}{V_3}$$

$$\frac{V_1 V_2^\kappa}{V_1^\kappa V_2} = \frac{V_4 V_3^\kappa}{V_3 V_4^\kappa}$$

$$\frac{V_1 V_2^\kappa}{V_1^\kappa V_2} = \frac{V_4 V_3^\kappa}{V_3 V_4^\kappa}$$

$$V_1^{(1-\kappa)} \cdot V_2^{-(1-\kappa)} = V_4^{(1-\kappa)} \cdot V_3^{-(1-\kappa)}$$

$$V_1^1 \cdot V_2^{-1} = V_4^1 \cdot V_3^{-1}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Práce z 1. do stádia jsou stejné jelikož:

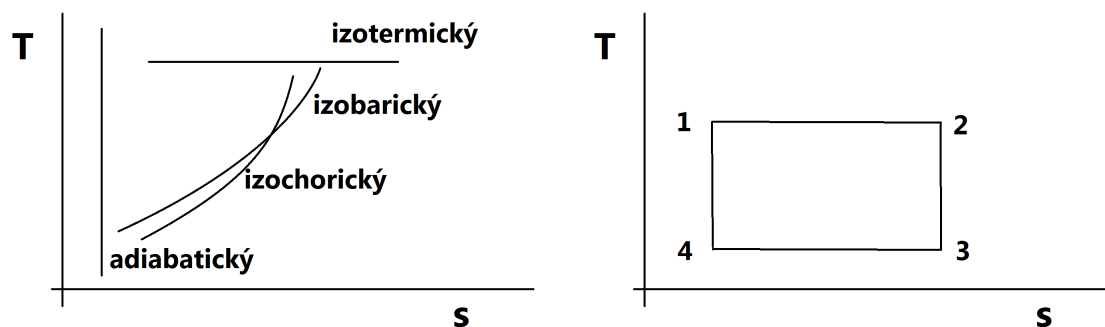
$$W = nRT \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)$$

$$\eta = \frac{-W}{Q} = \frac{-W_{1 \rightarrow 2} - W_{3 \rightarrow 4}}{Q} = \frac{nR(T_H - T_C) \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)}{nRT_H \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)}$$

Jak vidíme, tak pomocí výše uvedeného vztahu můžeme nahradit druhý poměr objemů substitucí a můžeme vytknout teploty. Poté zkracujeme:

$$\eta = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right)$$

c)



d)

Potřebujeme najít funkci, která bude popisovat výdej tepla, když se bude derivace této funkce rovnat 0, tak je to náš hledaný bod.

$$\eta = \frac{W}{Q}$$

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} = \frac{p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} V}{T}$$

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} V}{T}$$

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{e^{-\frac{V}{V_0}} V}{T}$$

$$T = \frac{e^{-\frac{V}{V_0}} V}{V_0} T_0$$

Nevím :/

16 FYKOS XXIX. ročník 5. série

16.1 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 1. úloha

Tenký drát s odporem $R = 100\text{ m}\Omega$ a délkou $l = 1\text{ m}$, který je připojen ke zdroji stejnosměrného napětí $U = 3\text{ V}$, obsahuje ve svém objemu $N = 10^{22}$ volných elektronů, kterými přispívá k toku elektrického proudu. Určete, jak velkou průměrnou (přesněji střední) rychlostí se elektrony v drátu pohybují.

Víme, že: $R = 100 \text{ m}\backslash\text{ohm}$ a $l = 1 \text{ m}$ a $U = 3 \text{ V}$, z toho snadno spočítáme proud:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Dále víme, že

$$I = \frac{Q}{t}.$$

Z toho:

$$Q = \frac{U}{R}t.$$

Nyní si potřebujeme spočítat náboj všech elektronů v tyči:

$$Q_e = N \cdot e.$$

Kde e je náboj jednoho elektronu ($e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Všechny elektrony se tedy posunou tyčí za:

$$Ne = \frac{U}{R}t,$$

$$t = \frac{RNe}{U}.$$

Dále víme, že vztah mezi časem, vzdáleností a rychlostí je:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{l}{t}.$$

Můžeme tedy spojit vše do jednoho vzorce:

$$v = \frac{lU}{RNe}.$$

K této rychlosti ale musíme ještě přičíst rychlost, kterou se pohybují elektrony normálně:

$$v = \frac{lU}{RNe} + v_0.$$

Střední rychlost ve vodiči za pokojové teploty v_0 jsem na internetu našel jako: $v_0 = 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$v = \frac{1 \cdot 3}{0,1 \cdot 10^{22} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} + 10^6 \approx 0,019 + 10^6.$$

Což se mi úplně správně nezdá, ale vztah se mi v pořádku zdá.

16.2 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 2. úloha

Mějme nádobu, která je pomyslně rozdělena na dvě shodné disjunktní oblasti A a B . V nádobě je n částic, z nichž se každá nachází s pravděpodobností 50 % v části A a s pravděpodobností 50 % v části B . Určete, s jakou pravděpodobností bude v části A $n_A = 0,6n$, resp. $n_A = 1 + n/2$ částic. Řešte pro $n = 10$ a $n = N_A$, kde $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ je Avogadrova konstanta.

Všimněme si, že pro $n = 10$ je počet částic stále 6. To však neplatí pro druhý počet částic. Matematicky můžeme zapsat jevů jako: $\left(\frac{10}{6}\right)$. Abychom vypočítali pravděpodobnost, tak musíme ještě počet těchto jevů vydělit počtem všech jevů, což je 2^n . Pro počet $n = 10$:

$$\frac{\left(\frac{10}{6}\right)}{1024} = \frac{210}{1024} \approx 20,5\%.$$

Pro další případ to bude obdobně:

$$\frac{\left(\frac{N_A}{0,6N_A}\right)}{2^{N_A}}.$$

Popřípadě

$$\frac{\left(\frac{N_A}{\frac{N_A}{2}+1}\right)}{2^{N_A}}.$$

Jak to spočítat netuším (kalkulačka ani <http://www.wolframalpha.com/>) Pomoci by taktéž mohl Pascalův trojúhelník.

16.3 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 3. úloha

Ve starověkém Egyptu uměli vyrobit bránu, ale ještě neznali mříže, tak brány zavírali nilany (vápencovými kameny). Na obrázku vidíte 150 otroků o hmotnosti $m = 60$ kg, kteří právě velmi pomalu otevírají bránu zavřenou nilanem o hmotnosti $M = 8$ t. Nilan přesně (vzduchotěsně) pasuje do konstrukce nad bránou ve tvaru kvádru, která má vnitřní rozměry $a = 3$ m, $b = 0,5$ m a $c = 3$ m. Uvnitř konstrukce je na počátku tlak $p_0 = 100$ kPa a teplota $T_0 = 300$ K a je umístěna ve výšce $H = 3$ m. Určete, jak vysoko jsou otroci schopni vlastní vahou nilan zdvihnout, jestliže se teplota vzduchu nemění.

Nejprve si ujasníme základní věci: bude se jednat o stlačování ideálního plynu, to v jaké výšce se začátek konstrukce nachází nemá zásadní vliv (předpokládám, že otroci si můžou přehmátnou během tahání). A budeme zvedat nilan, na něj bude působit tíhová síla. Otroci budou působit celou svoji vahou a nakonec zde bude síla, která bude působit na kámen ze shora, v momentě, kdy se nilan začne vsunovat do brány. Jelikož se vzduch začne stlačovat a začne působit na nilan.

Nejprve si stanovíme základní rovnici: $F_{gn} + F_{tn} = F_{go}$. kde g je tíhová a t tlaková n je nilan a o otroci. Všechny tíhové síly jsou jednoduché:

$$\begin{aligned} F_{gn} &= Mg \\ F_{go} &= 150mg \end{aligned}$$

Dále budeme počítat s tím, že se jedná o ideální plyn:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (193)$$

Teploty zůstávají stejné a všechny vstupní údaje známe, nyní musíme spočítat 2. tlak, poté už jednoduše spočítáme objem a z něho jednoduše dopočítáme výšku.

Víme že: $p = \frac{F}{S}$. Plochu si vyjádříme jako: $S = bc$. Sílu F už máme popsanou jako: F_{tn} , tu si můžeme vyjádřit jako: $F_{tn} = F_{go} - F_{gn}$. Nyní se už jedná jen o dosazování:

$$p = \frac{g(150m - M)}{bc} \quad (194)$$

To jsme ale pouze vypočítali změnu tlaku, celkový tlak bude:

$$p_2 = \frac{g(150m - M)}{bc} + p_1 \quad (195)$$

$$p_1 V_1 = (p_2 + p_1) V_2 \quad (196)$$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2 + p_1} \quad (197)$$

$$V_2 = \frac{p_1(abc)}{\frac{g(150m-M)}{bc} + p_1} \quad (198)$$

$$V_2 = \frac{p_1(abc)}{\frac{g(150m-M)+p_1bc}{bc}} \quad (199)$$

$$V_2 = \frac{p_1(abc)bc}{g(150m-M) + p_1bc} \quad (200)$$

A nyní z V_2 vyjádříme tloušťku vzduchové bubliny jako: $h = \frac{V_2}{S}$. Tudíž:

$$h = \frac{\frac{p_1(abc)bc}{g(150m-M)+p_1bc}}{bc} = \frac{p_1(abc)}{g(150m-M) + p_1bc} \quad (201)$$

Z toho je zřejmé, že můžeme tedy říci, že horní hrana kváдру se bude nacházet ve výšce h_2 :

$$h_2 = H + a - \frac{p_1(abc)}{g(150m-M) + p_1bc} \quad (202)$$

Pro naše hodnoty se bude horní hrana nacházet ve výšce:

$$h_2 = H + a - \frac{p_1(abc)}{g(150m-M) + p_1bc} \quad (203)$$

$$h_2 = 3 + 3 - \frac{10^5(3 \cdot 0,5 \cdot 3)}{9,81(150 \cdot 60 - 8000) + 10^5 \cdot 0,5 \cdot 3} \approx 3,18 \text{ m} \quad (204)$$

Tedy o 18,4 cm výše než je začátek konstrukce.

16.4 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 4. úloha

Máme auto, které se blíží kolmo ke zdi. Řidič, který v autě jede, by se ale chtěl přibližovat ke zdi bezpečně. Jaký by muselo mít auto průběh rychlosti, aby vzdálenost od auta ke zdi v každý okamžik odpovídala dráze, kterou by auto s okamžitou rychlostí v té chvíli urazilo za $T = 2$ s?

Nejprve si řekněme, že funkce popisující průběh vzdálenosti na čase bude $s(t)$. Poté derivací této funkce dostaneme rychlost a když vynásobíme tuto rychlost časem 2 s (T), tak po sečtení s původní funkcí dráhy v závislosti na čase dostaneme výchozí vzdálenost od stěny S . Můžeme tedy zapsat diferenciální rovnici:

$$s(t) + \dot{s}(t)T = S,$$

$$s(t)T = S - \dot{s}(t),$$

$$s(t) = \frac{S}{T} - \frac{\dot{s}(t)}{T},$$

$$s(t) = \frac{S}{T} - \frac{\dot{s}(t)}{T},$$

$$\frac{s(t)}{\dot{s}(t)} = \frac{S}{T\dot{s}(t)} - \frac{1}{T},$$

$$\int \frac{s(t)}{\dot{s}(t)} = \int \left(\frac{S}{T\dot{s}(t)} - \frac{1}{T} \right),$$

$$\int \frac{s(t)}{\dot{s}(t)} = \int \frac{S}{T\dot{s}(t)} - \int \frac{1}{T},$$

$$\ln |v(t)| = \frac{S}{T} - \frac{t}{T},$$

$$v(t) = \frac{S}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Funkce rychlosti tedy je:

$$v(t) = \frac{S}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

16.5 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; 5. úloha

Na nakloněné rovině stojí koule s nehomogenním rozložením hustoty. Známe úhel sklonu nakloněné roviny α , poloměr koule R a vzdálenost t těžiště koule od jejího středu. Pokud si označíme střed koule S , bod dotyku koule s rovinou D a těžiště koule T , pak definujeme úhel $\varphi_0 = \angle DST$ jako úhel před začátkem pohybu. Těžiště se navíc nachází v rovině určené úsečkou DS (normálou k rovině) a směrem z kopce dolů. V závislosti na těchto parametrech podrobně rozeberte, jak se bude dál vyvíjet pohybový stav koule. Koule na rovině neprokluzuje.

Jak vidíme, tak záleží už na první pohled na tom, jak daleko se těžiště nachází středu koule. Pokud se bude těžiště limitně blížit středu koule, ale nedosáhne ho a podložka bude zcela plochá, tak se kole nikdy nerozpohybuje. Na druhou stranu máme druhý extrém a to když bude těžiště v bodě D a náklon se bude limitně blížit 90° , tak stejně kvůli nulovému prokluzu nedojde k rozpohybování se.

Pro nás ale asi bude nejdůležitější, kdy se koule rozpohybuje, pro to aby se koule rozpohybovala, tak se její těžiště nesmí nikdy pohybovat vzhůru (mohlo by, ale potřebovalo by na to mít dostatečnou energii). Funkci středu koule si můžeme vyjádřit jako $y = x \sin \alpha$, jelikož je to funkce nakloněné roviny na řezu a tudíž i bodů D a S . Polohu jejich středu spočítáme jako: $y = y_m \sin(\omega t)$. Pokud započítáme i to, že rovina klesá, tak bude pro výšku středu platit: $y = y_m \sin(\omega t) - s \sin \alpha$ (kde s je uražená dráha), pokud se 1. derivace tohoto bude rovna 0, tak se koule v našem modelu nezastaví.

Tento model ale pro nás není tak zajímavý jelikož nás čeká, jestli se kouli podaří vůbec rozpohybovat a koule může nabírat hybnost a poté se může těžiště pohybovat i mírně vzhůru na určitou chvíli, nikdy se ale těžištěm nemůže dostat výše než bylo na začátku. Proto spočítáme původní výšku těžiště a poté určíme kam se bude kole pohybovat, pokud se bude rozdělit kouli na 2 polokoule, rozdělené normálovým vektorem k rovině, tak pokud se bude těžiště nacházet na polokouli, blíže kopci, tak se posune směrem ke kopci a poté se zastaví (/bude kmitat, ale stále na stejném místě). A pokud bude na druhé polokouli, tak se koule bude valit z kopce, poté se musí celá otočit aniž by se těžiště ocitlo v jakýkoliv moment výše než na v počáteční situaci, bude tedy platit že:

$$y_m \sin(\omega t) - s \sin \alpha \leq y_{poc}.$$

S tím, že s budeme počítat jako $|DT| \omega t$, všimněme si, že ω spočítáme jako $2\pi f$ a f si můžeme zvolit libovolně jelikož jednotka ω je $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a my počítáme s ω abychom mohli postupně „projet“ celou funkcí a zkontrolovat hodnoty, ale nepočítáme s hybností, to kvůli zachování energie a kvůli tomu, že těžiště nemůže dostat výše než kdy bylo. Proto:

$$y_m \sin(\omega t) - \omega t \sin \alpha \leq y_{poc}.$$

Všechny parametry této rovnice už známe, f v ω si můžeme zvolit libovolně a t se pak lineárně narůstá a zkusíme jestli bude nerovnost platit, jinak

$y_m = |DT|$. Následovně pak už jen dosadíme do rovnice a zjistíme jestli nerovnost platí nebo ne. Pokud bude platit, tak se koule nezačne kutálet, pokud nebude platit, koule se rozkutálí.

16.6 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; P úloha

Jak všichni víme, v jeskyních střední Evropy je docela zima, okolo 4°C . Proč je v metru docela teplo celý rok? Uvolňuje se více tepla z přítomných lidí, nebo spíše z technického zázemí?

Na začátek chci poznamenat, že nejsem z Prahy a tak si nejsem úplně jist jak je to určitými věcmi.

Jak víme, tak v obecně v podzemí je teplota obecně výrazně stabilnější. Jedna z hlavních příčin je ta, metro/jeskyně je obklopena spoustou materiálu a ten vyrovnává teplotu, přes onu zeminu je metro/jeskyně spojeno s celou Zemí a jedná se o něco jako rezervoár z termodynamiky (ze seriálových úloh). To nám teplotu vyrovnává.

V jeskyních se ale moc lidí ani techniky normálně nevyskytuje a tak se a tak se nemá jak zahřát, v momentě vyřazení metra by pravděpodobně taky pomalu došlo ke snížení teploty ve většině oblastí až k teplotě co je v jeskyních. Samozřejmě stále dochází ke změnám teplot v průběhu zimy, ale jsou nevýrazné.

Zároveň je teplota stabilní, jelikož i počet lidí v metru je celoročně stabilní.

Co se týče dodatečné otázky, co výrazněji zvyšuje teplotu jestli lidé nebo přístroje, tak zde už je problém složitější. Nejsem si totiž úplně jistý, co vše je zde za přístroje, ale určitě budou mít soupravy nějaké motory. Přívody elektřiny asi budou produkovat oproti tomu zanedbatelné teplo. Dále ještě bude produkovat teplo i osvětlení, ale nevím jaké zdroje jsou zde použity. Takže těžko říci. Dále je otázka jaké teplo budou odevzdávat lidé. Jelikož si myslím, že průměrný počet osob se může pohybovat kolem 200 až 300 osob.

Soupravy dále vytvářejí velké množství unikající energie ve formě tepla, například elektromotory soupravy, proudění vzduchu, teplo vzniklé brzděním. . . Dále zde jsou ještě další přístroje, ale ty už takové teplo nevyrábí.

Podle mých odhadů se asi uvolňuje více tepla z technického zázemí.

Částečně jsem čerpal z:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Metro_v_Praze

16.7 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; E úloha

Pomocí digitálního fotoaparátu změřte frekvenci střídavého proudu v síti. Postačí i chytrý telefon s vhodnou aplikací, která umožní nastavit přesnou hodnotu expozičního času.

Měření frekvence střídavého proudu pomocí fotoaparátu

Teorie: Teorie je poměrně jednoduchá. Použijeme fotoaparát nebo mobil a natavíme dobu expozice na nějaký určený časový úsek a poté si najdeme nějaký zdroj světla který zhasíná (známým příkladem je zářivka, my jsme však použili doutnavku) a přitom budeme pohybovat buďto fotoaparátem nebo zdrojem světla. Měli bychom poté dostat 100 teček (50 Hz (doutnavka se rozsvítí $2 \times$ během periody)) vyrovnaných vedle sebe (to kvůli pohybu).

Pomůcky: Mobil s nastavitelnou dobou expozice, doutnavka.

Provedení: Tabulka s naměřenými hodnotami se nachází níže:

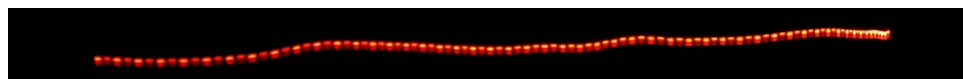
i	n	$\frac{f}{\text{Hz}}$	$\frac{\Delta f}{\text{Hz}}$
1	98	49	0,75
2	98	49	0,75
3	97	48,5	1,25
4	100	50	-0,25
5	103	51,5	-1,75
6	100	50	-0,25
7	102	51	-1,25
8	97	48,5	1,25
9	98	49	0,75
10	102	51	-1,25
Σ		497,5	9,5
ϕ		49,75	0,95

$$f = (49,75 \pm 0,95) \text{ Hz},$$

$$\eta = \frac{0,95}{49,75} = 1,91\%.$$



1. foto



2. foto

Interpretace: Jak vidíme tak, frekvence se pohybuje kolem 50 Hz. Naše měření bylo i docela přesné.

Dále se podíváme na chyby, kterými bylo zatíženo měření. Nejprve nás může napadnout, že frekvence není přesně 50 Hz, což je částečně pravda, jelikož frekvence není a ani nemůže být naprosto stálá. Dále také může způsobovat nějakou chybu fotoaparát a to tím, že doba expozice nemusí být přesná. Dále ještě můžu špatně počítat tečky (toto je asi v mém případě nejpravděpodobnější, ale radši to zanedbejme :D). Měření bylo celkové poměrně přesné. Naše naměřená hodnota $f = (49,75 \pm 0,95)$ se shoduje s reálnou. Jak tedy vidíme, chyba fotoaparátu mobilu asi nebyla tak velká, pro jistotu bych jí ale však ještě připočetl a zvětšil odhad chyby na 5%, tudíž $f = (49,75 \pm 2,49)$ Hz. Což je však stále velmi přesné. Naše metoda tedy byla poměrně přesná a účinná.

16.8 FYKOS XXIX. ročník; 5. série; S úloha

a. Použijte vztah pro entropii ideálního plynu $S(U, V, N)$ z řešení třetí seriálové úlohy

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} n R \ln \left(\frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^{\kappa}} \right) + n R s_0$$

a vztah pro změnu entropie

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{R} dN$$

a vypočítejte chemický potenciál jako funkci U , V a N . Upravte dále na funkci T , p a N .

Pomůcka: Přečtěte si o derivacích a malých změnách v druhém díle seriálu. Nyní by už mělo být zřejmější, že koeficienty jako $1/T$ před dU spočítáte jako parciální derivaci $S(U, V, N)$ podle U . Nezapomeňte na užitečný vztah $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ a že $n = N/N_A$.

Bonus: Vyjádřete tímto způsobem i teplotu a tlak jako funkce U , V a N . Eliminujte závislost tlaku na U , abyste dostali stavovou rovnici.

b. Je chemický potenciál ideálního plynu kladný, nebo záporný (s_0 považujte za zanedbatelné)?

c. Co se bude dít s plynem v pístu, pokud je plyn napojený na rezervoár s teplotou T_r ? Píst se může volně pohybovat a z druhé strany na něj nic nepůsobí. Popište, co se bude dít, pokud dovolíme jen kvazistatické procesy. Kolik práce takto dokážeme extrahovat? Platí, že se takto minimalizuje volná energie?

Pomůcka: Na výpočet práce se vám může hodit vztah

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

d. Entalpii jsme definovali jako $H = U + pV$, Gibbsovu energii jako $G = U - TS + pV$. Jaké jsou přirozené proměnné těchto potenciálů? Jaké termodynamické veličiny dostaneme derivacemi těchto potenciálů podle svých přirozených proměnných?

e. Vypočítejte změnu grandkanonického potenciálu Ω z jeho definičního vztahu $\Omega = F - \mu N$.

1) Nejprve máme rovnici:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

$$TdS = dU + pdV - \mu dN$$

$$dU + pdV - TdS = \mu dN$$

$$\mu = \frac{dU + pdV - TdS}{dN}$$

A nyní nám ještě překáží p , T a S . Za S dosadíme:

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2}nE \ln \left(\frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2}Rn^{\kappa}} \right) + nRs_0$$

$$\mu = \frac{dU + pdV - Td \left(\frac{s}{2}nE \ln \left(\frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2}Rn^{\kappa}} \right) + nRs_0 \right)}{dN}$$

No a teď už se to z toho jen NĚJAK vymlátí :D

2) Bude kladný, jelikož v rovnici $dU = TdS - pdV + \mu dN$ nás zajímá člen μdN a když budeme přidávat částice tak N bude kladné a energie se bude zvyšovat, proto musí být μ kladné, když budeme odebírat částice, tak změna bude záporná a záporný bude i počet částic, tudíž μ je jasně kladné.

3) Záleží na tom jaká bude počáteční teplota pístu, pokud bude nižší než T_R , tak bude plyn v pístu zvětšovat objem. Naopak bude teplota v pístu vyšší než T_R dojde ke zmenšení objemu vzduchu. Všechny procesy budou izobarické.

17 FYKOS XXIX. ročník 6. série

17.1 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 1. úloha

V roce 2015 byla udělena Nobelova cena za fyziku za experimentální prokázání oscilace neutrin. O neutrinech jste už jistě někdy slyšeli a možná víte, že s látkou interagují jen velmi slabě a proto dokáží bez zpomalení proletět Zemí a jinými velkými objekty. Zkuste za pomoci literatury a internetových zdrojů určit, kolik neutrin se v jednom okamžiku nachází v průměrném člověku. Nezapomeňte citovat zdroje!

V první řadě určitě budeme potřebovat znát náš objem. Průměrná hmotnost je přibližně 70 kg a naše hustota je o trochu nižší než hustota vody (0,985). Jelikož údaj 70 kg je hodně přibližný, můžeme počítat, že náš objem je přibližně 70 litrů ($= 70 \text{ dm}^3 = 70\,000 \text{ cm}^3$).

Na adrese http://www.aldebaran.cz/bulletin/2005_05_neu.php jsem našel, že v každém cm^3 je přibližně 300. Poté dostáváme pro tělo výsledek přibližně 21 000 000.

Na adrese <http://lappweb.in2p3.fr/neutrinos/anunivers.html> jsem našel, že v každém cm^3 je přibližně 330 (110 pro každou rodinu). Poté dostáváme pro tělo výsledek přibližně 23 100 000.

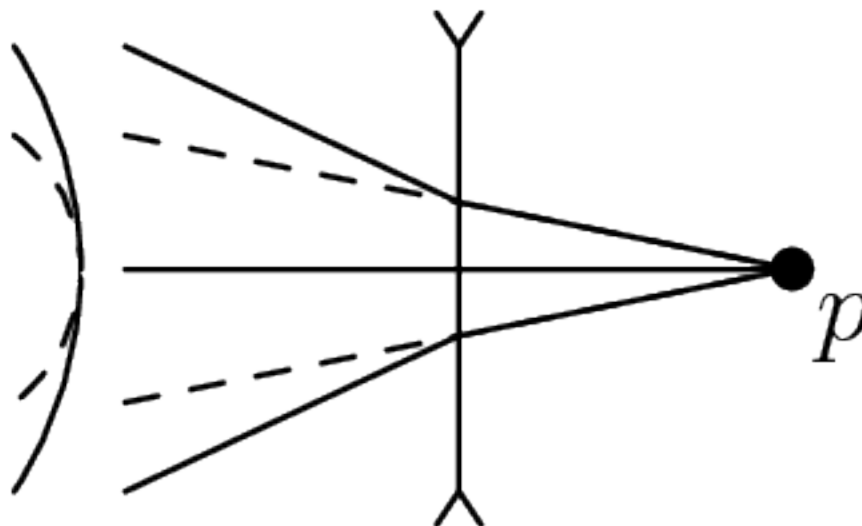
Výsledek by se tedy měl řádově pohybovat kolem $2 \cdot 10^7$ neutrin v průměrném člověku.

17.2 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 2. úloha

Pikošova kamarádka nosí brýle. Když si je nasadí, její oči se zdají menší. Je krátkozraká či dalekozraká? Svou odpověď dobře zdůvodněte.

Nejprve musíme zjistit, o jakou čočku se jedná. Jedná se o rozptylku, jelikož si můžeme představit, že k čočce jdou paprsky z více směrů, ale z ní odchází už jako svazek (který má blíže k rovnoběžkám).

Vše vysvětluje obrázek:



Plné čáry jsou paprsky, čárkované paprsky ukazují to, jak je možné, že se oko bude jevit menší. V bodě p je pozorovatel.

Jedná se o rozptylku, Pikošova kamarádka je tedy krátkozraká.

17.3 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 3. úloha

Autem o hmotnosti M jedeme nahoru do kopce a dolů ze stejného kopce se sklonem φ stejnou rychlostí v se zařazeným stejným převodovým stupněm, a tedy stejnými otáčkami motoru. Jaký je rozdíl tažného (do kopce) a brzdného (s kopce) výkonu motoru?

Nejprve si potřebujeme shrnout nějaká fakta. Když pojede auto do kopce, tak mu musí být dodána potenciální energie, tudíž $E = mgh$. Naopak proti tomu poté musí auto nějak ztratit tuto energii.

Když jede auto do kopce, tak se vůbec musí nějak udržet v pohybu a navíc ještě je tu tehdeňce, že by se začalo pohybovat i nazpět, kdyby motor vypověděl službu. Zatímco, když jede z kopce, tak by auto po výpadku motoru (a bez použití brzd) začalo zrychlovat.

Důležitý aspekt je odpor okolí. Díky konstantní rychlosti bude odpor okolí (odpor vzduchu, tření pneumatik, hybnost elektronů odlétávajících ze světél. . .) konstantní.

Představme si, že když jede auto z kopce, tak výkon je nulový (odpor vzduchu a úhel kopce α má tu správnou velikost). Pak bude výkon $P_2 = 0$. A co výkon při výjezdu? Nejprve bude muset auto překonat odpor prostředí a poté se musí samo nějak pohánět do kopce. Jakou práci na sobě vykoná můžeme snadno spočítat jako: $E = mgh$. A převýšení spočítáme jako: $h = vt \sin \alpha$, s tím, že vt je uražená vzdálenost autem, pro naše účely je vždy $t = 1$ s. A $\sin \alpha$ určuje jaká část z této vzdálenosti bude v horizontálním směru. Poté bude výkon: $P_{auta} = Mgv t \sin \alpha / t = Mgv \sin \alpha$.

Nyní si označme výkon odporu prostředí jako P_p . Poté bude platit, že první výkon bude $P_1 = P_p + P_{auta}$ a druhý výkon bude v tomto specifickém případě: $P_2 = 0$. V druhém případě, na auto působí stále odpor prostředí, tudíž zde musí být nějaký ekvivalentní výkon, a to výkon způsobený gravitačním zrychlením.

Tento výkon budeme počítat jako $P_{gravitační} = Fv \sin \alpha = Mgv \sin \alpha$, což už vypadá familiérně. Akorát že nyní působí rychlost v opačném směru, tudíž pro nás záporném. Tudíž: $P_2 = P_p - P_{gravitační} = 0$.

Nyní budeme uvažovat případ, kdy se už motor bude aktivně podílet. Tudíž když pojedeme z kopce tak výkon bude:

$$P_2 = P_p - P_{gravitacni},$$

což pozor nebude 0. A první výkon bude

$$P_1 = P_p + P_{auta},$$

bude odpor prostředí a výkon motoru. Zajímavé je, že $P_{gravitacni}$ a P_{auta} mají přesně opačné velikosti, zbytek výrazů je stejný.

Rozdíl tedy je

$$\Delta P = P_{gravitacni} + P_{auta} = 2(Mgv \sin \alpha).$$

17.4 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 4. úloha

Pro ohřev plasmatu ve fúzních zařízeních se používají svazky neutrálních částic. V takovém zařízení se nejprve urychlí ionty deuteria na vysokou energii a následně se přenosem náboje neutralizují, přičemž si zachovávají téměř původní rychlost. Na tokamaku COMPASS mají částice na výstupu ze svazku energii 40 keV a proud ve svazku těsně před neutralizací je 12 A. Jaká síla působí na generátor svazku? Jaký je jeho výkon?

Nejprve si převedeme data ze zadání:

$$1 \text{ eV} \approx 1,605 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$40 \text{ keV} \approx 6,42 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

Atomová hmotnost (klidová): $2,014 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} = 3,35 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Budeme potřebovat spočítat rychlost:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \approx 1,96 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Rychlost je dostatečně malá na to abychom mohli změnu hmotnosti vlivem rychlosti zanedbat:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ted' když známe rychlost a proud (12 A), tak pomocí náboje (onen náboj je 1 elektron) můžeme spočítat počet částic za čas.

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

$$I = 12 \text{ A}$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$Q = e \cdot N \text{ (} N \dots \text{počet částice)}$$

$$N = \frac{It}{e} = \frac{12}{1,602 \cdot 10^{-19}} t \rightarrow 7,49 \cdot 10^{19} \text{ castic} \cdot \text{s}^{-1}$$

Nyní víme kolik zde projde za sekundu částic a jejich energii, můžeme tedy spočítat výkon a to:

$$P = E \cdot N = 40\,000 \cdot 7,49 \cdot 10^{19} \approx 3 \cdot 10^{24} \text{ W}.$$

A pro výpočet síly použijeme vztah: $P = F \cdot v$.

$$v = 1,96 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$F = \frac{P}{v}$$

$$F = \frac{3 \cdot 10^{24}}{1,96 \cdot 10^6} \approx 1,53 \cdot 10^{18} \text{ N}.$$

17.5 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; 5. úloha

V homogenním magnetickém poli $B = (0, 0, B_0)$, $B_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ obíhají po kružnicích v rovině xy dvě částice, elektron s hmotností $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ a nábojem $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a alfa částice s hmotností $m_{He} = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a nábojem $2e$. Poloměr trajektorie elektronu je $r_e = 2 \text{ cm}$, poloměr trajektorie alfa částice je $r_{He} = 200 \text{ m}$. V jednom okamžiku zapneme slabé homogenní elektrické pole $E = (0, 0, E_0)$, $E_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Určete, jaké dráhy se a s_{He} urazí každá z částic za čas $t = 1 \text{ s}$ od zapnutí elektrického pole. Předpokládejte, že částice jsou dostatečně vzdálené a nevyzařují.

Pro nás je velmi klíčový vztah:

$$F_m = |Q| v B$$

My známe: $Q = -1,6 \cdot 10^{-19}$, $B = (0, 0, B_0)$, $B_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{T}$. v však neznáme.

Dále se tato síla musí rovnat dostředivé síle. $F_m = F_d$. S tím, že $F_d = m \frac{v^2}{r}$.
Tudíž:

$$|Q| v B = m \frac{v^2}{r},$$

z toho odvodíme v a r jako:

$$v = \frac{r |Q| B}{m},$$

$$r = \frac{mv}{|Q| B}.$$

Nyní jsme už schopni spočítat všechny parametry dráhy (především v). Tedy konkrétně:

$$r_e = 0,02 \text{ m}$$

$$r_{\text{He}} = 200 \text{ m}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$Q_e = -e$$

$$Q_{\text{He}} = 2e$$

$$B = (0, 0, B_0), B_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{He}} = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Dále pouze dosadíme do vzorečku:

$$v_e \approx 1,76 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\text{He}} \approx 4,85 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dále se bude hodit vzoreček pro Lorenzovu sílu:

$$F = q(E + v \times B)$$

F ... síla

q ... elektrický náboj

v ... rychlost náboje

E ... intenzita elektického pole

B ... Magnetická indukce

$\times$... vektorový součin

Pokud chceme pouze příspěvek elektrického pole tak:

$$F_{el} = qE$$

Budeme ještě potřebovat následující údaj:

$$E = T = (0, 0, T_0), T_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Nyní jsme schopni spočítat jednotlivé síly.

Všimněme si, že elektrické pole působí ve směru osy z , tudíž kolmo na magnetické pole, navíc pokud odsadíme konkrétní čísla, tak zjistíme, že elektrická síla je velmi malá (asi 100 000 krát menší). Proto, si rozdělíme pohyb na 2 složky, jeden v rovině xy a druhý, který bude působit ve směru osy z . Pohyb ve směru osy z bude pak rovnoměrně zrychlený, budeme tedy potřebovat znát zrychlení. Zrychlení jsme schopni spočítat jako:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}.$$

Po číselném dosazení pak dostáváme hodnoty:

$$a_e = \frac{-1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \approx -8,8 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$a_{\text{He}} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{6,6 \cdot 10^{-27}} \approx 2,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Z toho hned vidíme, že zrychlení elektronu je extrémní a už od prvního pohledu můžeme říci, že elektron urazí na z souřadnici přibližně 4 000 km,

což je opravdu hodně. Nyní ale potřebujeme znát rychlosti v ploše xy . Ty už však máme spočteny jako:

$$v_e \approx 1,76 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\text{He}} \approx 4,85 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

A nyní je idea prostá a to, že přímým směru (směr xy) je rychlost konstantní a v horizontálním směru lineárně narůstá. V čase t tedy bude rychlost:

$$v = \sqrt{v^2 + (at)^2}$$

Nás zajímá uražená dráha, tudíž provedeme určitý integrál této funkce podle času t :

$$s = \int_0^1 \sqrt{v^2 + (at)^2} dt$$

Přiznám se, že zas tak dobře integrovat neumím a tak jsem použil <http://www.wolframalpha.com/>:

$$\int_0^1 \sqrt{(1.76 \cdot 10^5)^2 + (-8.8 \cdot 10^6 \cdot t)^2} dt \approx 4,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(4.85 \cdot 10^5)^2 + (2.4 \cdot 10^3 \cdot t)^2} dt \approx 4,85 \cdot 10^5 \text{ m}$$

Všimněme si, že u elektronu byla magnetická síla takřka zanedbatelná vůči elektrické, zatímco v druhém případě to bylo úplně naopak.

17.6 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; P úloha

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak sestavit zařízení, které pozná, jakým směrem je natočeno vůči směru tíhového zrychlení a tuto informaci nějakým způsobem převede na elektrický signál. (Zařízení na způsob akcelerometr v chytrých telefonech.)

Můžeme si udělat několik podkategorií - pokud se nebudeme pohybovat, můžeme gyroskop, toto by nefungovalo, pokud bychom letěli do vesmíru nebo na zařízení nějak působili. Pro zjednodušení, ale můžeme předpokládat, že máme vždy nějaké reálné zrychlení nějakým směrem a že se nepohybujeme (nebo alespoň nějak $\pm$ reálně.)

První případ, co mě napadl je, na styl kyvadla: Měli bychom za něco zavěšené kyvadlo a poté bychom například měřili změnu elektrického pole v cívkách, které bychom umístili na stěnách, tak aby se kyvadlo případně pohybovalo přímo nad nimi, tak aby průchodem kolem nich vyvolávalo elektrický proud (samozřejmě je potřeba správně zvolit materiály). Tento systém má však tu nevýhodu, že pokud se směr zrychlení nebude měnit, tak nebude docházet ke generování elektrického pole, tudíž pokud nebudeme mít předcházející informaci o působení pole, tak nevíme jakým směrem pole působí. Možnost jak to zjistit je mírně s přístrojem zahrkat. Je i více způsobů jak by šlo z tohoto zařízení získávat onu informaci, například ke kyvadlo by byly připojeny 4 tyče, každá směřující jiným směrem a tyto tyče by byla zasouvány nebo vysouvány ze stěny a opět by šlo cívkami převádět informaci na elektrický signál.

To samé by se dalo i upravit tak, že máme dutinu ve tvaru koule a v ní kuličku, ve stěnách jsou pak cívky. Které budou detekovat případný pohyb.

Toto se dá dále upravit na systém, kde budeme mít malé páčky trčící do komory a v ní budeme mít písek nebo nějakou kapalinu (se správnými vlastnostmi (jako viskozita hustota. . .)). Poté budeme měřit výchylku tyček/páček. Velmi podobně funguje i naše ucho.

Nyní budeme mít 3 na sobě nezávislá kyvadla (1. se bude kývat ve směru x , druhé y , poslední z .) na obou stranách kyvadla budou pružinky, které se ho budou snažit držet v přímé poloze. Buďto opět můžeme měřit cívkami generovaný proud a nebo můžeme vrchol použít jako ovladač proměnlivého odporu, na jehož základě můžeme snadno vypátrat polohu páčky i když se tíhové zrychlení nemění.

Další možnost je zavěsit volně laser/nějaké soustředěné světlo a dolů pod něj/do tvaru koule uspořádat malé solární panely, za základě znalosti, který panel produkuje nějaký proud, budeme schopni vypátrat směr zrychlení (opět

v libovolný okamžik).

Také ještě na podobném principu by šlo udělat to, že zavěsíme závaží na pružiny z obou stran a poté dáme po stranách cívky a budeme měřit vychýlení (změnu vychýlení).

Poslední a asi nejméně přesná metoda je mít komoru se zdrojem teplého vzduchu. Poté by se na různých místech komory měřil vzduch teploměry. Teplý vzduch bude stoupat nahoru, teploměr co naměří nejnižší teplotu bude nejnižší.

Ještě mě napadá další možnost a to je použití kondenzátorů. Například můžeme mít opět 3 na sebe kolmé přístroje, každý měřící v jiné ose. Jelikož kapacita kondenzátoru závisí mimo jiné na vzdálenosti desek (nepřímo), tak bychom umístili 2 desky proti sobě a s použitím pružinek bychom byli schopni vypočítat dokonce i velikost tíhového zrychlení v příslušném směru a z přístroje by šla získat informace v jakýkoliv okamžik (i v klidu).

Poté lze aplikovat kondenzátory například i na přístroj ve stylu kyvadla, kdy by byly kondenzátory po stranách a měřili by vzdálenost ke kyvadlu a tak určovali jeho vychýlení.

Také ještě můžeme k měření polohy kyvadla použít laser. Nebo dát na stranu světlo a na kyvadlo vypouklé zrcadlo a na druhou stranu dát solární panel a měřit množství dopadeného světla.

Při večerním googlení jsem ještě narazil na Piezoelektrický jev,³⁸ kdy při stlačení krystalu dochází ke generování elektrického napětí. Toto by se dalo rovněž velmi jednoduše implementovat několika způsoby. Například mějme kouli uvnitř kole a po vnitřním povrchu vnější koule bude jen spousta těchto čidel.

³⁸<https://en.wikipedia.org/wiki/Piezoelectricity>

17.7 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; E úloha

Pokud pustíte hopík či nějaký jiný míček na vhodný povrch, pak se začne odrážet. Při každém odrazu se disipuje (ztrácí do tepla, zvuku atd.) kinetická energie míčku a proto nevyskočí do takové výše, co původně. Definujme koeficient restituce jako poměr kinetických energií míčku po dopadu ku kinetické energii před dopadem. Závisí koeficient restituce na výšce, ze které míček dopadal? Vyberte si jeden vhodný míček a jeden vhodný povrch, na kterém proměřte závislost koeficientu restituce na výšce, ze které míček dopadl. Experiment náležitě popište a proveďte dostatečný počet měření. Nezapomeňte na vliv odporu vzduchu.

Zákeřný restituční koeficient

Teorie:

Teorie pokusu je poměrně jednoduchá: Vezmeme gumový míček (hopík (nadále jako hopík)). A poté ho z určité výšky pustíme a poté budeme měřit jak vysoko opět vyskočil.

Bude zde však hodně věcí, které nám budou komplikovat měření.

Začneme s odporem vzduchu, zde se nám bude ztrácet energie, kterou budeme mylně započítávat do ztráty při odrazu. Navíc odpor vzduchu se mění společně s druhou mocninou rychlosti. Navíc tuto chybu nemůžeme jen tak odstranit, na to bychom potřebovali například vzduchoprázdňý válec. Takové vybavení mi však chybělo.

Dále se míček vždy neodrazí přesně nahoru, ale může i mírně do stran, může mít nějakou pomalou rotaci, kvůli které rovněž neodskočí přesně nahoru. V důsledku těchto nepřesných odrazů naměříme poté menší výšku odskoku.

Nadále zde vzniká určitá chyba díky nám a to díky tomu, že například hopík pouštíme pouze přibližně z nějaké výšky, udělujeme mu mírnou rotaci, ale co nejdůležitější, nejsme přesně schopni změřit do jaké výšky se hopík odrazil. Nemůžeme ho zde prostě zastavit a v klidu si změřit výšku, ale musíme dávat pozor, dívat se pod vhodným úhlem a tak dále. Toto bych odhadoval jako jednu z hlavních chyb měření.

Také hopík nemusel být přesná koule.

Nakonec jsou zde ještě chyby způsobené podložkou, například zde mohou být nějaké drobné nerovnosti a nečistoty, rovněž nemusí být podložka zcela horizontální. (Tyto chyby jsou však ale ve srovnání s ostatními už zanedbatelné.)

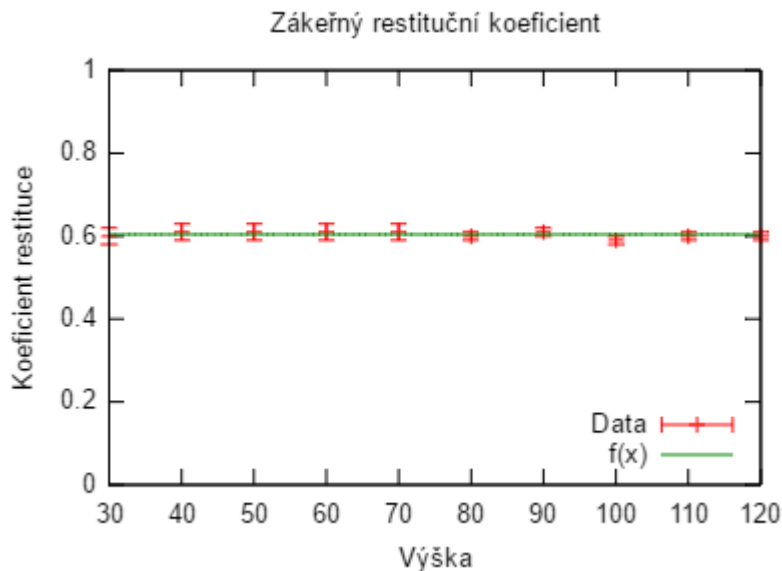
Pomůcky:

hopík, metr

Měření:

Rozhodl jsem se, že provedu vždy 10 měření pro každou výšku. Z nich pak spočítám střední hodnotu a chybu poté jsem vynesl hodnoty do grafu. Jak jsem zjistil, data vypadala jako lineární funkce (koeficient restituace nezávisí na výšce). Nakonec jsem ještě provedl fit.

$\frac{h}{\text{cm}}$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
1	19	24	31	37	43	51	56	62	65	71
2	18	23	30	36	41	47	52	59	65	75
3	19	25	30	36	41	47	53	58	69	73
4	17	25	32	37	42	48	54	59	65	70
5	18	25	29	36	45	46	55	58	65	71
6	18	23	30	38	44	47	55	58	65	72
7	17	23	29	35	42	48	56	62	64	70
8	19	24	32	35	44	46	54	59	68	70
9	18	25	31	35	44	47	56	59	67	70
10	18	25	32	38	42	49	55	58	66	75
Σ	181	242	306	363	428	476	546	592	659	717
$\bar{Q}$	18,1	24,2	30,6	36,3	42,8	47,6	54,6	59,2	65,9	71,7
η	0,60	0,61	0,61	0,61	0,61	0,60	0,61	0,59	0,60	0,60
Σ_{Δ}	5,4	8	10	9,6	12	11,2	10,8	11,2	12,8	16,4
Δ	0,54	0,8	1	0,96	1,2	1,12	1,08	1,12	1,28	1,64
$\frac{ch}{\%}$	3,0	3,3	3,3	2,6	2,8	2,4	2,0	1,9	1,9	2,3



$$f_{(x)} : y = 0,604$$

Závěr:

V úloze jsem měl za cíl vypátrat případnou závislost restitučního koeficientu na původní výšce. Pomocí naměřených dat jsem došel k závěru, že restituční koeficient není na výšce závislý, jelikož se v mém případě pohyboval vždy jen mírně nad hodnotou 60%. Proto tedy vyvozují výše zmíněný závěr a to, že koeficient je konstantní (v závislosti na výšce).

Na závěr jsem rozhodl, že své měření podložím fakty, na stránce: http://fyzweb.cz/materialy/aplety_hwang/bouncingBall/index.html, jsem našel, že koeficient restituce r definován jako: $r = \frac{v_0}{v_1}$. Z toho odvodíme:

$$r = \frac{v_0}{v_1},$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$E = mgh$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m}}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$r = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{2gh_1}},$$

$$r = \frac{\sqrt{2g} \sqrt{h_0}}{\sqrt{2g} \sqrt{h_1}},$$

$$r = \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{h_1}},$$

$$\sqrt{h_1} = \frac{\sqrt{h_0}}{r},$$

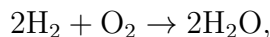
$$h_1 = \frac{h_0}{r^2}.$$

S tím, že vidíme, že r zůstává po celou dobu konstantní, tudíž h_1 bude narůstat lineárně h_0 , což je zcela v souladu s měřením a odvozeným výsledkem. Koeficient restituce tudíž nezávisí na výšce, ze které hopík padá.

Dodatek: Koeficient restituce bude ještě závislý na materiálech (hopíku a podložky).

17.8 FYKOS XXIX. ročník; 6. série; S úloha

a. Najděte v tabulkách nebo na internetu, jak se změní entalpie a Gibbsova energie při reakci



kde jde o přeměnu plynů na plyn a odehrává se při standardních podmínkách. Vypočítejte také, jak se změní entropie při takovéto reakci. Výsledky udávejte vztažené na jeden mol.

b. Pro fotonový plyn platí, že tok energie skrze plochu je dán vztahem

$$j = \frac{3}{4} \frac{k_B^4 \pi^2}{45 \hbar c^3} v T^4.$$

Dosaďte hodnoty konstant a porovnejte výsledek se Stefanovým-Boltzmannovým zákonem.

c. Vypočítejte vnitřní energii a Gibbsovu energii fotonového plynu. Dále pomocí vnitřní energie vypočítejte závislost teploty fotonového plynu na objemu při adiabatickém rozpínání, tedy při procesu s $\delta Q = 0$.

Nápověda: Zákon pro adiabatický děj s ideálním plynem jsme odvodili v druhém dílu seriálu.

d. Vezměme si fotonový plyn. Ukažte pro $\delta Q/T$, že pokud ho vyjádříme jako

$$\delta Q/T = f_{,T} dT + f_{,V} dV,$$

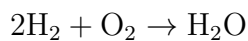
tak funkce $f_{,T}$ a $f_{,V}$ splňují nutnou podmínku na existenci entropie, tedy že

$$\frac{\partial f_{,T}(T, V)}{\partial V} = \frac{\partial f_{,V}(T, V)}{\partial T}.$$

a)

Entalpie:https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_enthalpy_of_formation H_2 : $0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ O_2 : $0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ H_2O : $-241,818 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

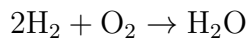
Reakce:



$$0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \rightarrow -483,636 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Gybbsova energie:https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Gibbs_free_energy_of_formation H_2 : $0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ O_2 : $0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ H_2O : $-228,61 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Reakce:



$$0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \rightarrow -457,22 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Entropie:H₂:

$$130,68 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

<http://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?ID=C1333740&Mask=1>

O₂:

$$205,15 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

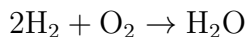
<http://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?ID=C7782447&Mask=1>

H₂O (Gas properties):

$$188,84 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

[https://en.wikipedia.org/wiki/Water_\(data_page\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Water_(data_page))

Reakce:



$$2 \cdot 130,68 + 205,15 \rightarrow 2 \cdot 188,84$$

$$466,51 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \rightarrow 377,68 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

b)

$$j = \frac{3}{4} \frac{k_B^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} T^4,$$

$$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1},$$

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$T = 2,73 \text{ K},$$

$$j = 3,149 \cdot 10^{-6} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

Stefanův-Boltzmannův zákon:

$$I = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

$$I = 3,149 \cdot 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$$

c)

Vnitřní energii spočítáme jako:

$$dU = TdS - pdV,$$

$$TdS = T \cdot 4\alpha VT^3,$$

$$pdV = \alpha T^4 \cdot V,$$

$$U = 4\alpha VT^4 - \alpha VT^4 = 3\alpha VT^4,$$

$$U = \frac{k_B^4 \pi^2}{15 \hbar^3 c^3} VT^4,$$

Gibbsovu energii spočítáme jako:

$$dG = -SdT + Vdp,$$

$$SdT = 4\alpha V \cdot \frac{T^4}{4} = \alpha VT^4,$$

$$Vdp = \alpha VT^4,$$

$$G = -\alpha VT^4 + \alpha VT^4 = 0,$$

Dále závislost teploty fotonového plynu v závislosti na objemu:

$$pV^\kappa = \text{konst.},$$

$$p = \alpha T^4,$$

$$\alpha T^4 V^\kappa = \text{konst.},$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{\text{konst.}}{\alpha V^\kappa}}$$

d)

18 Výsledky

18.1 M&M

<http://mam.mff.cuni.cz/rocnik/22/>

18.2 FYKOS

<http://fykos.cz/poradi/vysledky-celkove?volume=29&serie=6>

19 Statistika

Od první ho posledního dne:	≈ 10 měsíců
VyT _E Xáno stran:	346
Souborů:	1 237
Celkem slov:	81 460
Celkem znaků:	439 010
Vyprodukováno dat:	7,85+ GB

Petr Šimůnek

O autorovi & dodatečné poznámky

Všechny texty byly sepsány během školního roku 2015&2016 mnou. Tato kniha je pouze soupisem všech těchto úloh, záměrně byly všechna řešení ponechána v původním stavu (mohou se lišit pouze čísla odkazů) a ještě jsou zde zadání úloh, aby je nebylo třeba pracně dohledávat, texty seriálových úloh zde kvůli délce nenaleznete, ale jsou na webových stránkách seminářů. To proto, aby zde byla vidět typografická změna v mých řešeních. Jinak nepočítám že tuto knihu bude někdo číst celou, ale doufám že se najde alespoň někdo, kdo si přečte alespoň pár krátkých článků a nebo projede pár výsledků. Neumím česky, tudíž zde asi bude pár(set) bych, ale úmysl byl, aby převládala vědecká hodnota. Doufám, alespoň něco z toho co si zde přečtete někoho v budoucnu k něčemu inspiruje, hodně štěstí při čtení.



Petr Šimůnek